

Ατομική Διπλωματική Εργασία

**ΠΑΙΓΝΙΑ VORONOI ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ ΓΡΑΦΩΝ:
Μία Ανασκόπηση**

Φρύνη Πουγιούκα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μάιος 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Παίγνια Voronoi Σε Διάφορες Τοπολογίες Γράφων: Μία Ανασκόπηση

Φρύνη Πουγιούκα

κ. Μάριος Μαυρονικόλας

Η Ατομική Διπλωματική Εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Πληροφορικής του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Κύπρου

Μάιος 2011

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της Διπλωματικής μου εργασίας και ταυτόχρονα του προπτυχιακού μου κύκλου σπουδών, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που βρισκόταν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια και με στήριζε με την κατανόηση, την ενθάρρυνση και τη συμπαράσταση της στις δύσκολες στιγμές. Υπήρξε το μεγαλύτερο μου στήριγμα καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και αυτό είναι το μεγαλύτερο αγαθό που θα μπορούσα να λάβω.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έγκειται στο ευρύτερο πεδίο της Θεωρίας Παιγνίων. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα γύρω από τα παίγνια Voronoi αφορά το κλασσικό ανταγωνιστικό πρόβλημα τοποθέτησης εξυπηρετητών, δηλαδή την στρατηγική τοποθέτηση του παίκτη στην αγορά ώστε να ανταγωνίζεται τους υπόλοιπους παίκτες, καθώς οι πελάτες εξυπηρετούνται από τον κοντινότερο παίκτη στην αγορά. Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιείται σε ένα στρατηγικό παιχνίδι με πλήθος παικτών και κόμβων σε ένα γράφημα. Έπειτα κάθε παίκτης επιλέγει τη θέση του μέσα από το γράφημα. Στόχος του παιγνιδιού είναι ο κάθε παίκτης να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, όπου το κέρδος ορίζεται ως το πλήθος των κοντινότερων κόμβων που αντιστοιχούν σε κάθε παίκτη. Εάν η μετακίνηση θέσεων ενός παίκτη, δηλ. η αλλαγή στρατηγικής του, και παραμονή των υπολοίπων στις θέσεις τους, δεν συνεπάγεται αύξηση του κέρδους του, τότε το παιχνίδι έχει ισορροπία. Ένα παιχνίδι μπορεί να έχει πολλαπλές ισορροπίες ή καθόλου.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται ανασκόπηση βιβλιογραφίας όσο αφορά παίγνια σε διάφορες τοπολογίες γράφων. Επίσης παρατίθενται τα σημαντικότερα αποτελέσματα, που έχουν εξαχθεί μέσα από τη βιβλιογραφία, στις διάφορες τοπολογίες γράφων καθώς επίσης και την εξεύρεση ισορροπίας σ' αυτές.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Θεωρία Παιγνίων	1
1.1.1	Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων	1
1.1.2	Τι είναι Στρατηγικό Παιγνίδι	2
1.1.3	Η Ισορροπία Nash	2
1.1.3.1	Ποιος είναι ο John Nash	2
1.1.3.2	Η προσέγγιση της ισορροπίας Nash	3
1.1.4	Απόδοση Συστημάτων	4
1.2	Πρόβλημα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών	4
1.2.1	Ορισμός	4
1.2.2	Τι είναι τα διαγράμματα Voronoi	5
1.2.3	Τι είναι τα παίγνια Voronoi	7
Κεφάλαιο 2	Προβλήματα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών.....	9
2.1	Μοντέλο Hotelling	9
2.2	Παίγνια Voronoi σε μη κατευθυνόμενο γράφο	11
2.2.1	Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας	20
2.3	Παίγνια Voronoi σε κυκλικό μη κατευθυνόμενο γράφο	21
2.3.1	Προφίλ και Ισορροπίες Nash	21
2.3.2	Χαρακτηρισμός Ισορροπίας Nash	26
2.3.2.1	Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας	28
2.4	Τριγωνοποίηση Delaunay	36
2.5	Παίγνια Voronoi σε Μεταβατικούς Γράφους	39
2.5.1	Διμερής Τόρος d-Διαστάσεων	41
2.5.2	Υπερκύβος d-Διαστάσεων	42
2.5.3	Κύκλοι Συνδεδεμένοι Με Κύβους d-Διαστάσεων	43
2.5.4	Παίγνια Voronoi	43
2.5.5	Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 2 Παίκτες	44
2.5.6	Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 3 Παίκτες	45
2.5.7	Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 4 Παίκτες	45
2.5.8	Θεώρημα Δύο Φρουρών	46

Κεφάλαιο 3	Παίγνια Απομόνωσης	47
	3.1 Παίγνια Απομόνωσης Πλησιέστερου Γείτονα & Συνολικής Απόστασης	50
	3.2 Μονοτονικά Αυξανόμενα Παίγνια Απομόνωσης	51
	3.3 Μονοτονικά Μειωμένα Παίγνια Απομόνωσης	51
	3.4 Υπερκύβος n -Διαστάσεων	52
	3.5 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Επιλογής	52
	3.5.1 Παίγνια Απομόνωσης Μονής Επιλογής	53
	3.6 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Κατάληξης	54
 Κεφάλαιο 4	 Παίγνια Σε Κυκλικούς Γράφους Με Χορδή.....	 55
	4.1 Παραδείγματα Κυκλικών Γράφων Με Χορδή	58
	4.2 Συμπεράσματα	69
 Κεφάλαιο 5	 Σύνοψη.....	 70
 Πίνακας Ελληνικών Ορισμών		 72
 Βιβλιογραφία		 73

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Θεωρία Παιγνίων	1
1.1.1 Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων	1
1.1.2 Τι είναι Στρατηγικό Παιγνίδι	2
1.1.3 Η Ισορροπία Nash	2
1.1.3.1 Ποιος είναι ο John Nash	2
1.1.3.2 Η προσέγγιση της ισορροπίας Nash	3
1.1.4 Απόδοση Συστημάτων	4
1.2 Πρόβλημα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών	4
1.2.1 Ορισμός	4
1.2.2 Τι είναι τα διαγράμματα Voronoi	5
1.2.3 Τι είναι τα παίγνια Voronoi	7

1.1 Θεωρία Παιγνίων

Πρώτος ο Emile Borel, Γάλλος μαθηματικός, ασχολήθηκε με τη θεωρία παιγνίων το 1921. Απώτερος του στόχος ήταν να καθορίσει την ύπαρξη βέλτιστης στρατηγικής σε ένα παίγνιο και έπειτα να βρει την στρατηγική αυτή. Για το λόγο ότι ο Borel δεν ανέπτυξε περαιτέρω τις ιδέες του, τα εύσημα στη θεωρία παιγνίων λαμβάνει ο John Von Neumann, Ούγγρος μαθηματικός, ο οποίος εξέδωσε το πρώτο του άρθρο στη θεωρία παιγνίων το 1928. Από το σημείο αυτό και μετά η θεωρία παιγνίων είχε αλματώδη ανάπτυξη, με συνέπεια την εφαρμογή της σε διάφορους τομείς όπως τα οικονομικά, μαθηματικά, ψυχολογία, πολιτική, βιολογία κτλ, μέχρι και σε εφαρμογές στην καθημερινότητα μας.

1.1.1 Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων είναι μία γενική θεωρία που μελετά τις συνέπειες, σε ένα στρατηγικό παιγνίδι, εγωιστικής συμπεριφοράς των οντοτήτων που ανταγωνίζονται μεταξύ τους για την αξιοποίηση των διαμοιραζόμενων πόρων του συστήματος και την αποκόμιση του μεγαλύτερου κέρδους. Οι οντότητες στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε στη συνέχεια είναι οι παίκτες, και συνεπώς αυτοί που λαμβάνουν τις αποφάσεις. Σκοπός κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

1.1.2 Τι είναι Στρατηγικό Παιγνίδι

Ένα στρατηγικό παιγνίδι είναι ένα μοντέλο με n παίκτες, καθένας από τους οποίους επιλέγει μόνο μία στρατηγική, την οποία δεν μπορεί να αλλάξει μετέπειτα. Ένα στρατηγικό παιγνίδι αποτελείται από τους παίκτες, τις επιτρεπτές ενέργειες για κάθε παίκτη, τους κανόνες του παιγνιδιού, τις στρατηγικές (μόνο μία για κάθε παίκτη), το προφίλ στρατηγικής και το κέρδος κάθε παίκτη.

Προφίλ στρατηγικής ορίζεται ως το σύνολο στρατηγικών για κάθε παίκτη το οποίο καθορίζει πλήρως όλες τις ενέργειες που πραγματοποιούνται μέσα στο παιγνίδι. Το προφίλ στρατηγικής πρέπει να περιέχει αυστηρά μόνο μία στρατηγική για κάθε παίκτη.

1.1.3 Η ισορροπία Nash

1.1.3.1 Ποιος είναι ο John Nash

Πρώτος ο John Nash, γεννημένος το 1928 στην Δυτική Βιρτζίνια των ΗΠΑ, εισήγαγε στα παίγνια την έννοια της ισορροπίας.

Το 1948, έχοντας πλέον αποκτήσει πτυχίο Μαθηματικών, ως μεταπτυχιακός φοιτητής του Πανεπιστημίου του Princeton, αποκαλείτο ως ιδιοφυία από τους καθηγητές του, μιας και ήταν κορυφαίος στην θεωρία παιγνίων. Μεταξύ των εργασιών του είχε ασχοληθεί με τα λεγόμενα «προβλήματα συμφωνιών», στα οποία προβλήματα οι παίκτες μοιράζονται κάποια κοινά συμφέροντα. Η σημαντικότερη εργασία με την οποία είχε ασχοληθεί όμως ήταν αυτή σχετικά με την ισορροπία στη θεωρία παιγνίων,

και χάρη στην πολύτιμη συμβολή του πήρε το όνομα «Ισορροπία του Nash» [16]. Η συγκεκριμένη δημοσίευση του Nash έγινε στην ηλικία των μόλις 21 ετών. Αν και αρχικά δεν έτυχε ευρείας υποδοχής, η προσέγγιση του Nash για την θεωρία παιγνίων, τον οδήγησε στην απόκτηση πολλών βραβείων.

Το 1978 απονέμεται στον Nash το βραβείο «John Von Neumann Theory Prize» για την ανακάλυψη της μη συνεργάσιμης ισορροπίας, η οποία σήμερα είναι γνωστή ως «Ισορροπία του Nash». Το 1994, παραλαμβάνει το Βραβείο Νόμπελ στις Οικονομικές Επιστήμες για τη γενική του συνεισφορά στη θεωρία παιγνίων ως απόφοιτος του Πανεπιστημίου του Princeton.

1.1.3.2 Η προσέγγιση της ισορροπίας Nash

Το θεώρημα που διατύπωσε ο John Nash, σχετικά με την ισορροπία, αναφέρει πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας. Σύμφωνα με αυτό το σημείο ισορροπίας, όλοι οι παίκτες, οι οποίοι δεν συνεργάζονται μεταξύ τους, επιλέγουν τις ενέργειες που τους συμφέρουν καλύτερα, γνωρίζοντας και επιλογές των αντιπάλων τους. Κάθε παίκτης σκέφτεται τι μπορεί να επιλέξει ο αντίπαλος του ως ενέργεια και προσπαθεί να καταλάβει τη συμπεριφορά του, με την οποία γίνεται και η επιλογή της στρατηγικής του. Δηλαδή η στρατηγική ενός παίκτη αποτελεί την καλύτερη αντίδραση στην στρατηγική του αντιπάλου του. Αυτός ο συνδυασμός στρατηγικών αποτελεί την λεγόμενη «Ισορροπία του Nash» [16].

Συνεπώς, ισορροπία Nash έχουμε στην περίπτωση όπου κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει μονομερώς το κέρδος του αλλάζοντας στρατηγική. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι ένα παίγνιο ισορροπεί όταν κανένας από τους παίκτες δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από την στρατηγική του. Μικτή ισορροπία Nash έχουμε σε παίγνια με μικτές στρατηγικές, όπου οι παίκτες δεν επιλέγουν μία στρατηγική από ένα σύνολο διαθέσιμων στρατηγικών, αλλά ο τρόπος που παίζουν είναι σύμφωνα με μία πιθανοτική κατανομή στο σύνολο των στρατηγικών τους. Κάθε πεπερασμένο παιγνίδι έχει μεικτή ισορροπία Nash.

Σε ένα παίγνιο G , έχουμε γνήσια ισορροπία Nash, όταν η στρατηγική ισορροπίας κάθε παίκτη είναι η βέλτιστη αντίδραση στις στρατηγικές ισορροπίας των άλλων παικτών. Κάποια παιγνίδια δύναται να μην έχουν γνήσια ισορροπία Nash.

Οι παίκτες καταλαβαίνουν τότε βρίσκονται σε ισορροπία, αν μια αλλαγή στις στρατηγικές από οποιονδήποτε παίκτη, οδηγήσει σε χαμηλότερο κέρδος από αυτό που θα είχαν αν παρέμεναν στη αρχική στρατηγική. Υπάρχουν παίγνια που έχουν περισσότερες από μία ισορροπίες Nash, ενώ υπάρχουν και παίγνια χωρίς κανένα σημείο ισορροπίας Nash.

1.1.4 Απόδοση Συστημάτων

Σχετικά με την απόδοση συστημάτων, έχουμε διάφορες θεωρίες που χαρακτηρίζουν την απόδοση του συστήματος στις διάφορες ισορροπίες των γράφων. Οι βασικότερες και πιο δημοφιλείς θεωρίες που δίνονται μέσα από τη βιβλιογραφία, είναι το τίμημα αναρχίας [13] και το τίμημα σταθερότητας [3]. Το τίμημα αναρχίας ορίζεται ως ο λόγος μεταξύ της χειρότερης αντικειμενικής τιμής της ισορροπίας στο παιχνίδι και της τιμής μιας βέλτιστης λύσης. Από την άλλη, το τίμημα σταθερότητας ορίζεται από το λόγο μεταξύ της καλύτερης αντικειμενικής τιμής της ισορροπίας στο παιχνίδι και της τιμής μιας βέλτιστης λύσης.

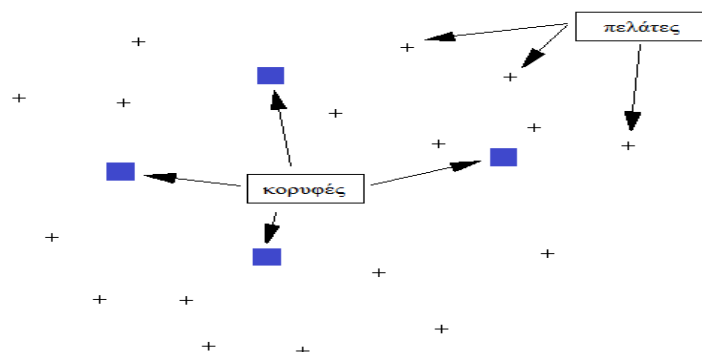
1.2 Πρόβλημα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών

1.2.1 Ορισμός

Γενικά, το πρόβλημα τοποθέτησης εξυπηρετητών [6,7,9] έχει ως εξής:

Δεδομένου ενός συνόλου από κορυφές τοποθετημένες στο χώρο – και ενός συνόλου από πελάτες, οι οποίοι εξυπηρετούνται από κορυφές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 τότε έχουμε τα πιο κάτω ερωτήματα:

- Ποιες κορυφές να χρησιμοποιηθούν;
- Ποιοι πελάτες θα εξυπηρετηθούν από ποιες κορυφές;



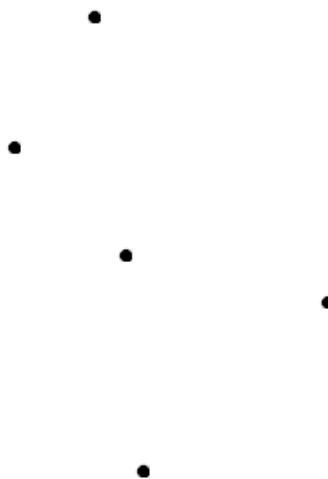
Σχήμα 1.1 – Αναπαράσταση προβλήματος τοποθέτησης εξυπηρετητών

1.2.2 Τι είναι τα διαγράμματα Voronoi

Τα διαγράμματα Voronoi επινοήθηκαν από τον Georgy Voronoy (1868 – 1908), ο οποίος ήταν μαθητής του Andrey Markov (1856 – 1922) αλλά και δάσκαλος των Delaunay (1890 - 1980) και Sierpinski (1882 – 1969). Με την επινοήση του δημιούργησε ένα ολόκληρο μαθηματικό πλαίσιο μέσω της υπολογιστικής γεωμετρίας.

Τα διαγράμματα Voronoi είναι μία μέθοδος διαμέρισης του χώρου δύο διαστάσεων, η οποία βασίζεται στον κανόνα του πλησιέστερου σημείου, εφαρμόζοντας την Ευκλείδεια απόσταση. Έστω πεπερασμένο σύνολο σημείων S στο επίπεδο. Στόχος είναι η διαμέριση του επιπέδου σε χωρία, όπου κάθε χωρίο θα προσδιορίζει το πλήθος των σημείων του επιπέδου τα οποία βρίσκονται σε κοντινότερη απόσταση από ένα δεδομένο σημείο $s \in S$ συγκριτικά με οποιοδήποτε άλλο σημείο.

Στο Σχήμα 1.2 παρουσιάζεται η περιγραφή του διαγράμματος Voronoi δύο διαστάσεων.

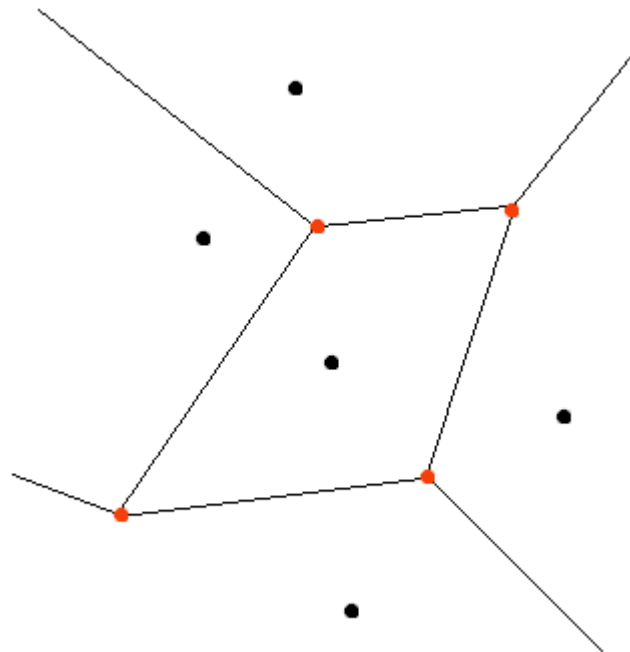


Σχήμα 1.2 – Αυθαίρετο σύνολο S 5 σημείων στο επίπεδο

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, για τους σκοπούς του παραδείγματος, τα σημεία αποτελούν τα εστιατόρια μιας πόλης, και μέσω του διαγράμματος Voronoi έχουμε ως στόχο τον προσδιορισμό των περιοχών της πόλης που βρίσκονται σε κοντινότερη απόσταση από κάθε εστιατόριο, οι οποίες συνεπώς αποτελούν την άμεση πελατεία τους. Οι περιοχές αυτές αποτελούν τα χωρία της διαμοίρασης, τα οποία ονομάζονται κελιά Voronoi του διαγράμματος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.3.

Ένα κελλί Voronoi, που αντιστοιχεί σε ένα σημείο $s \in S$, είναι ο γεωμετρικός χώρος των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται σε κοντινότερη απόσταση από το σημείο s απ' ό,τι σε οποιοδήποτε άλλο σημείο $s' \in S$.

Δεν υπάρχουν σημεία στα οποία να αντιστοιχούν κενά κελιά, αφού κάθε κελί περιλαμβάνει τουλάχιστον το ίδιο το σημείο, το οποίο έχει μηδενική απόσταση από τον εαυτό του. Τα μεσοκάθετα τμήματα των γειτονικών σημείων, δηλαδή τα κοινά όρια μεταξύ των κελλιών Voronoi, ονομάζονται ακμές Voronoi. Τα σημεία τομής των ακμών Voronoi ονομάζονται κορυφές Voronoi και υποδεικνύουν τα μεμονωμένα σημεία που ισαπέχουν από 3 ή περισσότερα σημεία του επιπέδου. Το πιο κάτω σχήμα παρουσιάζει το διάγραμμα Voronoi, στο οποίο διακρίνονται τα σημεία, τα κελιά Voronoi, οι ακμές Voronoi και οι κορυφές Voronoi.



Σχήμα 1.3 – Το αντίστοιχο διάγραμμα Voronoi, όπου με πορτοκαλί χρώμα παρουσιάζονται οι κορυφές Voronoi.

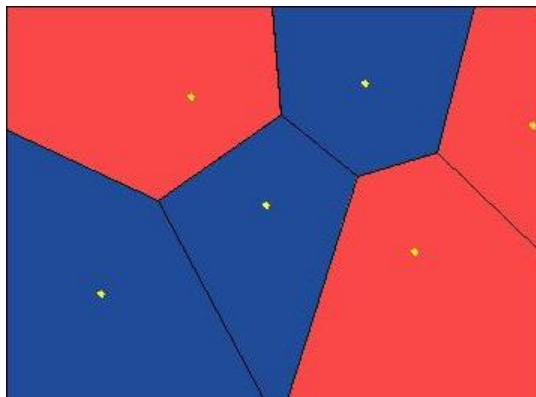
1.2.3 Τι είναι τα παίγνια Voronoi

Γενικά με την έννοια παίγνιο εννοούμε την κατάσταση εκείνη, όπου οι έξυπνες αποφάσεις των παικτών είναι αναγκαστικά αλληλοεξαρτώμενες.

Ο όρος «παίγνια Voronoi» επηνοήθηκε από τον Hee-Kap Ahn [1]. Η πρώτη εφαρμογή των παιγνίων Voronoi γράφτηκε από τους Chris Poultney και Monty Faidley μαζί με τον καθηγητή έρευνας Dennis Shasha το 1996, οι οποίοι δημιούργησαν ένα αλγόριθμο που κατασκευάζει διαγράμματα Voronoi για ένα σχετικά μικρό αριθμό σημείων.

Τα παίγνια Voronoi ανήκουν στην κατηγορία των ανταγωνιστικών παιγνίων τοποθέτησης εξυπηρετητών [7], τα οποία παρέχουν μοντέλα πωλητών που συναγωνίζονται μεταξύ τους, επιδιώκοντας να μεγιστοποιήσουν το μερίδιο τους με την στρατηγική τους τοποθέτηση.

Ένα παίγνιο Voronoi, στην βασική του έκδοση, που φαίνεται στο Σχήμα 1.4, παίζεται από 2 παίκτες. Έστω ότι στον παίκτη 1 αντιστοιχεί το χρώμα μπλε και στον παίκτη 2 το χρώμα κόκκινο. Οι δύο αυτοί παίκτες προσθέτουν εναλλάξ ένα πλήθος n από σημεία. Έπειτα υπολογίζεται το διάγραμμα Voronoi σε σχέση με τα σημεία που έχουν προστεθεί και νικητής αναδεικνύεται ο παίκτης ο οποίος έχει καταλάβει το μεγαλύτερο χώρο, την στιγμή που έχουν προστεθεί όλα τα σημεία και από τους δύο παίκτες.



Σχήμα 1.4 – Αρχική Έκδοση Παιγνίου Voronoi με 2 παίκτες (μπλε, κόκκινο).

Το ερώτημα του παιγνίου είναι αν υπάρχει μια στρατηγική που να επιτρέπει σε κάποιον από τους παίκτες να κερδίσει. Η στρατηγική αυτή υπάρχει και έχει αποδειχθεί [2].

Σε γενικές γραμμές ένα παίγνιο Voronoi είναι ένα απλό γεωμετρικό μοντέλο, το οποίο έχει σχέση με την ανταγωνιστική επιλογή θέσεων σε ένα χώρο (π.χ. επιλογή κόμβων σε ένα γράφημα). Οι επιλογές αυτές έχουν να κάνουν με τον ανταγωνισμό μεταξύ των παικτών. Οι γεωμετρικές έννοιες συνδιάζονται με επιχειρήματα της Θεωρίας Παιγνίων για να μελετηθεί αν υπάρχει νικηφόρα στρατηγική.

Στρατηγική θεωρούμε το σχέδιο του παιγνίου που περιγράφει το πως οι παίκτες θα δράσουν ή θα κινηθούν σε κάθε πιθανή περίπτωση. Συνεπώς νικηφόρα στρατηγική ονομάζεται το σχέδιο που προαναφέρθηκε, το οποίο τελικά οδηγεί τον παίκτη σε νίκη. Τα παίγνια Voronoi είναι μία άμεση εφαρμογή των διαγραμμάτων Voronoi, τα οποία έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη υποενότητα.

Κεφάλαιο 2

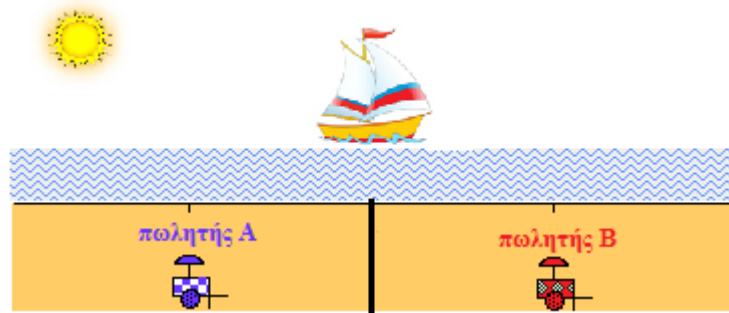
Προβλήματα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών

2.1 Μοντέλο Hotelling	9
2.2 Παίγνια Voronoi σε μη κατευθυνόμενο γράφο	11
2.2.1 Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας	20
2.3 Παίγνια Voronoi σε κυκλικό μη κατευθυνόμενο γράφο	21
2.3.1 Προφίλ και Ισορροπίες Nash	21
2.3.2 Χαρακτηρισμός Ισορροπίας Nash	26
2.3.2.1 Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας	28
2.4 Τριγωνοποίηση Delaunay	36
2.5 Παίγνια Voronoi σε Μεταβατικούς Γράφους	39
2.5.1 Διμερής Τόρος d-Διαστάσεων	41
2.5.2 Υπερκύβος d-Διαστάσεων	42
2.5.3 Κύκλοι Συνδεδεμένοι Με Κύβους d-Διαστάσεων	43
2.5.4 Παίγνια Voronoi	43
2.5.5 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 2 Παίκτες	44
2.5.6 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 3 Παίκτες	45
2.5.7 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 4 Παίκτες	45
2.5.8 Θεώρημα Δύο Φρουρών	46

2.1 Μοντέλο Hotelling

Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τον Harold Hotelling [11] στα μέσα του προηγούμενου αιώνα, θέλωντας να δείξει την επίδραση του ανταγωνισμού σε αποφάσεις που αφορούν την τοποθεσία. Συνήθως βασίζεται σε 2 πωλητές παγωτού, ο πωλητής A και ο πωλητής B, σε μία έκταση παραλίας 1 μιλίου. Για σκοπούς του μοντέλου, προϋποθέτεται ότι το είδος παγωτού και το κόστος είναι το ίδιο και για τους δύο πωλητές. Οι αγοραστές είναι κατανεμημένοι εξίσου σε όλη την έκταση της παραλίας. Λογικό είναι ότι οι αγοραστές θα προτιμήσουν τον πωλητή παγωτού, ο

οποίος βρίσκεται σε κοντινότερη απόσταση από αυτούς. Έτσι λοιπόν, όπως φαίνεται και στο πιο κάτω Σχήμα 2.1, το μήκος της παραλίας «χωρίζεται» σε 2 ίσα μέρη, ένα μέρος για κάθε πωλητή, και ο κάθε πωλητής τοποθετεί την παγωταρία του στο κέντρο ακριβώς της περιοχής του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Οι πελατεία χωρίζεται εξίσου, στα 2. Όσοι πελάτες βρίσκονται στο δεξιό μέρος της παραλίας αγοράζουν από τον πωλητή B και όσοι βρίσκονται στο αριστερό αγοράζουν από τον πωλητή A.



Σχήμα 2.1 – Μοντέλο Hotelling I

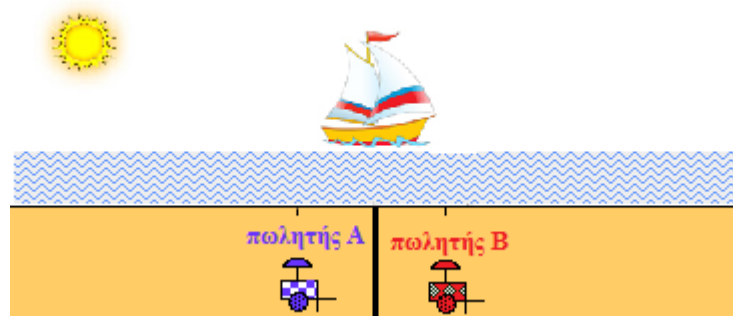
Αν όμως ο πωλητής A μετακινηθεί δεξιότερα, προς τον πωλητή B και κοντινότερα στο κέντρο της παραλίας, τότε ο πωλητής A θα αυξήσει την πελατεία του, καθώς, αυξάνοντας την έκταση της παραλίας που του αντιστοιχεί, θα καταλάβει τους πελάτες που βρίσκονται αριστερότερα του αλλά και κάποιους από τους προηγούμενους πελάτες του πωλητή B. Η μετακίνηση φαίνεται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 – Μοντέλο Hotelling II

Συνεπώς η λογική λύση θα ήταν να βρίσκονται και οι 2 πωλητές ακριβώς στο κέντρο της παραλίας, χωρίς όμως να υπάρχουν πελάτες μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.

Ο πωλητής A καταλαμβάνει τους πελάτες που βρίσκονται αριστερότερα από το κέντρο και ο πωλητής B καταλαμβάνει τους πελάτες που βρίσκονται δεξιότερα από το κέντρο. Αυτό ισχύει νοουμένου ότι οι πελάτες που βρίσκονται στα άκρα της παραλίας είναι πρόθυμοι να περπατήσουν μέχρι και μισό μίλι για να φτάσουν στον κοντινότερο τους πωλητή παγωτού.



Σχήμα 2.3 – Μοντέλο Hotelling III

2.2 Παίγνια Voronoι σε μη κατευθυνόμενο γράφο

Στην αρχική έρευνα [5] που πραγματοποιήθηκε όσο αφορά την ισορροπία Nash σε παίγνια Voronoι σε ακατεύθυντο γράφο με περισσότερους από 2 παίκτες, παρουσιάζεται το εξής μοντέλο:

Έχουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο $G(V,E)$ με n κόμβους, όπου $n=|V|$ και k παίκτες, όπου $k < n$. Η απόσταση μεταξύ κόμβων συμβολίζεται με $d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, και ισούται με το ελάχιστο πλήθος ακμών σε ένα διασυνδεδεμένο μονοπάτι, αλλιώς ισούται με άπειρο αν οι κορυφές δεν είναι διασυνδεδεμένες. Το σετ στρατηγικής κάθε παίκτη είναι V . Ένα προφίλ στρατηγικής k παικτών είναι ένα διάνυσμα $f = (f_1, \dots, f_k)$ το οποίο συνδέει κάθε παίκτη σε ένα κόμβο. Για κάθε κόμβο – πελάτη $v \in V$ η απόσταση από την κοντινότερη κορυφή - παίκτη δηλώνεται ως $d(v, f) := \min_{f_i} d(v, f_i)$.

Έπειτα οι πελάτες ανατίθενται στις κοντινότερες κορυφές τους. Δηλαδή, το προφίλ στρατηγικής f καθορίζει τη γενικευμένη διαμέριση $\{F_1, \dots, F_k\}$, όπου για κάθε παίκτη $1 \leq i \leq k$ και κάθε κόμβο $v \in V$:

$$F_{i,v} = \frac{1}{|\arg \min_j d(v, f_j)|} \text{ αν } d(v, f_i) = d(v, f)$$

αλλιώς,

$$F_{i,v} = 0$$

Ως F_i δηλώνεται το κελλί Voronoi του παίκτη i και η ακτίνα του ως $\max_v d(v, f_i)$.

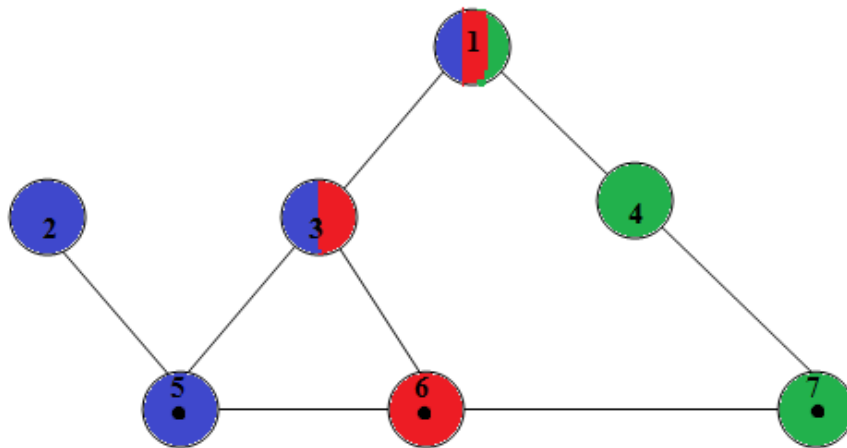
Κάθε παίκτης επιλέγει έναν κόμβο από το σύνολο κόμβων του συγκεκριμένου γράφου. Έπειτα σε κάθε παίκτη ανατίθενται οι κοντινότεροι σ' αυτόν κόμβοι του γράφου. Αν η ίδια κορυφή αντιστοιχεί σε περισσότερους παίκτες, τότε η ανάθεση της κορυφής μοιράζεται διά τον αριθμό των παικτών στους οποίους αντιστοιχεί. Το **κέρδος** κάθε παίκτη καθορίζεται από το πλήθος κορυφών που αντιστοιχεί στον καθένα, $p_i := \sum_{v \in V} F_{i,v}$

Το **κοινωνικό κόστος** του προφίλ στρατηγικής f καθορίζεται από το άθροισμα των αποστάσεων όλων των κορυφών - παικτών προς τον κοντινότερο τους κόμβο – πελάτη,

$$\text{cost}(f) := \sum_{v \in V} d(v, f)$$

Παραδείγματα προφίλ στρατηγικής σε γράφους φαίνονται πιο κάτω.

Παράδειγμα 1:



Σχήμα 2.3 – Παράδειγμα 1: Προφίλ στρατηγικής ενός γράφου με το αντίστοιχο κέρδος κάθε παίκτη.

Στο παράδειγμα του Σχήματος 2.3 παρουσιάζεται το προφίλ στρατηγικής ενός γράφου με 3 παίκτες, όπου κάθε παίκτης παρουσιάζεται με διαφορετικό χρώμα, μπλε, κόκκινο, πράσινο, στους κόμβους με μαύρη τελεία 5,6 και 7 αντίστοιχα. Όπως έχει προαναφερθεί, σε κάθε παίκτη ανατίθενται οι κοντινότερες σ' αυτόν κορυφές του γράφου.

Μπλε Παίκτης:

- Ο κόμβος 5 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 2 του ανήκει εξ' ολοκλήρου καθώς έχει την μικρότερη απόσταση από τον μπλε παίκτη, η οποία είναι 1, ενώ από τους άλλους δύο παίκτες η απόσταση από τον κόμβο 2 είναι τουλάχιστον 2 και 3 αντίστοιχα.
- Ο κόμβος 3 του ανήκει κατά το ήμισυ καθώς απέχει κατά 1, τόσο από τον παίκτη 5 όσο και από τον παίκτη 6 και συνεπώς τον μοιράζονται.
- Ο κόμβος 1 του ανήκει κατά το 1/3, καθώς ο κόμβος 1 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

Συνολικό κέρδος μπλε παίκτη: $1+1+1/2+1/3 = 17/6$

Κόκκινος Παίκτης:

- Ο κόμβος 6 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 3 του ανήκει κατά το ήμισυ καθώς απέχει κατά 1, τόσο από τον παίκτη 5 όσο και από τον παίκτη 6 και συνεπώς τον μοιράζονται.
- Ο κόμβος 1 του ανήκει κατά το $1/3$, καθώς ο κόμβος 1 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

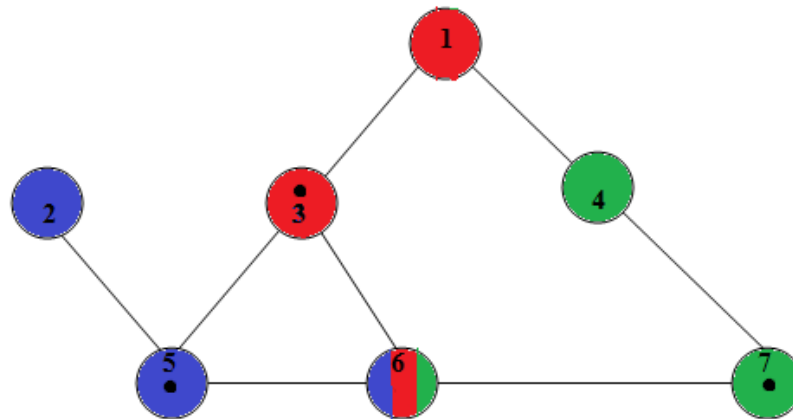
Συνολικό κέρδος κόκκινου παίκτη: $1+1/2+1/3 = 11/6$

Πράσινος Παίκτης:

- Ο κόμβος 7 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 4 του ανήκει εξ' ολοκλήρου καθώς έχει την μικρότερη απόσταση από τον πράσινο παίκτη, η οποία είναι 1, ενώ από τους άλλους δύο παίκτες η απόσταση από τον κόμβο 4 είναι τουλάχιστον 2 και 3 αντίστοιχα.
- Ο κόμβος 1 του ανήκει κατά το $1/3$, καθώς ο κόμβος 1 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

Συνολικό κέρδος πράσινου παίκτη: $1+1+1/3 = 14/6$

Παράδειγμα 2:



Σχήμα 2.4 – Παράδειγμα 2: Προφίλ στρατηγικής ενός γράφου με το αντίστοιχο κέρδος κάθε παίκτη.

Στο παράδειγμα του Σχήματος 2.4 παρουσιάζεται το προφίλ στρατηγικής ενός γράφου με 3 παίκτες, όπου κάθε παίκτης παρουσιάζεται με διαφορετικό χρώμα, μπλε, κόκκινο, πράσινο, στους κόμβους με μαύρη τελεία, με αριθμό 5,3 και 7 αντίστοιχα. Όπως έχει προαναφερθεί, σε κάθε παίκτη ανατίθενται οι κοντινότερες σ' αυτόν κορυφές του γράφου.

Μπλε Παίκτης:

- Ο κόμβος 5 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 2 του ανήκει εξ' ολοκλήρου καθώς έχει την μικρότερη απόσταση από τον μπλε παίκτη, η οποία είναι 1, ενώ από τους άλλους δύο παίκτες η απόσταση από τον κόμβο 2 είναι τουλάχιστον 2 και 3 αντίστοιχα.
- Ο κόμβος 6 του ανήκει κατά το $1/3$, καθώς ο κόμβος 6 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

Συνολικό κέρδος μπλε παίκτη: $1+1+1/3 = 14/6$

Κόκκινος Παίκτης:

- Ο κόμβος 3 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 1 του ανήκει εξ' ολοκλήρου καθώς έχει την μικρότερη απόσταση από τον κόκκινο παίκτη, η οποία είναι 1, ενώ από τους άλλους δύο παίκτες η απόσταση από τον κόμβο 1 είναι τουλάχιστον 2.
- Ο κόμβος 6 του ανήκει κατά το $1/3$, καθώς ο κόμβος 6 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

Συνολικό κέρδος κόκκινου παίκτη: $1+1+1/3 = 14/6$

Πράσινος Παίκτης:

- Ο κόμβος 7 του ανήκει εξ' ολοκλήρου, με μηδενική απόσταση από τον εαυτό του.
- Ο κόμβος 4 του ανήκει εξ' ολοκλήρου καθώς έχει την μικρότερη απόσταση από τον πράσινο παίκτη, η οποία είναι 1, ενώ από τους άλλους δύο παίκτες η απόσταση από τον κόμβο 4 είναι τουλάχιστον 2 και 3 αντίστοιχα.
- Ο κόμβος 6 του ανήκει κατά το $1/3$, καθώς ο κόμβος 6 απέχει με την ίδια απόσταση και από τους 3 παίκτες και συνεπώς τον μοιράζονται.

Συνολικό κέρδος πράσινου παίκτη: $1+1+1/3 = 14/6$

Υπενθυμίζεται ότι ισορροπία Nash έχουμε στην περίπτωση όπου κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει μονομερώς το κέρδος του αλλάζοντας στρατηγική.

Θεώρημα 1 [5]

Το κέρδος p_i κάθε παίκτη i σε μία ισορροπία Nash σε γράφο είναι μεταξύ:

$$\frac{n}{2k} < p_i < \frac{2n}{k}$$

όπου n το πλήθος των κόμβων και k το πλήθος των παικτών.

Επίσης,

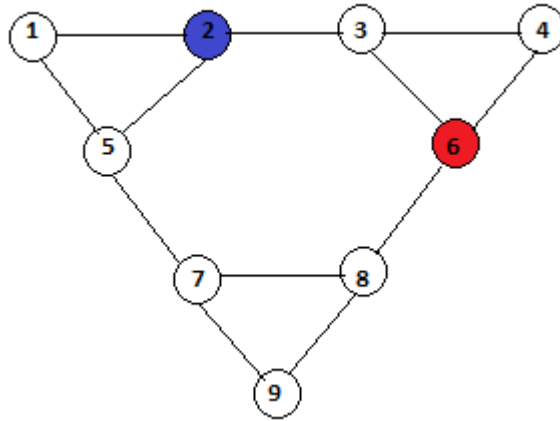
Θεώρημα 2 [5]

Σε ένα γράφο:

Το μέγιστο κέρδος που μπορεί να υπάρξει είναι : p

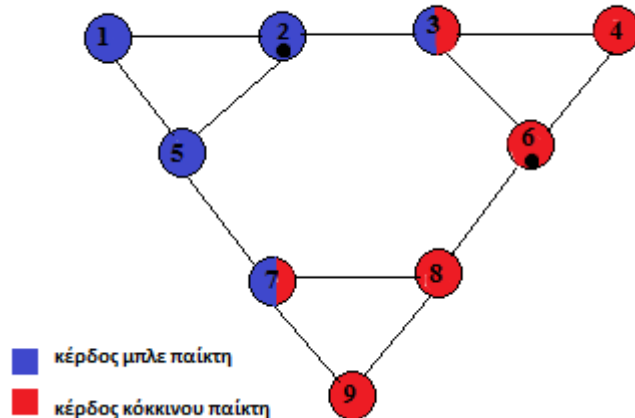
Το ελάχιστο κέρδος που μπορεί να υπάρξει είναι : $\frac{p}{2}$

Αν όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο κέρδος, τότε το κέρδος είναι ακριβώς $\frac{n}{k}$ μιας και όλα τα κέρδη των παικτών αθροίζονται σε n . Σε διαφορετική περίπτωση, υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης που κερδίζει λιγότερο από $\frac{n}{k}$ και συνεπώς κάποιος άλλος που κερδίζει περισσότερο από $\frac{n}{k}$.



Σχήμα 2.5 – Παράδειγμα γράφου με 2 παίκτες στο οποίο δεν έχουμε ισορροπία.

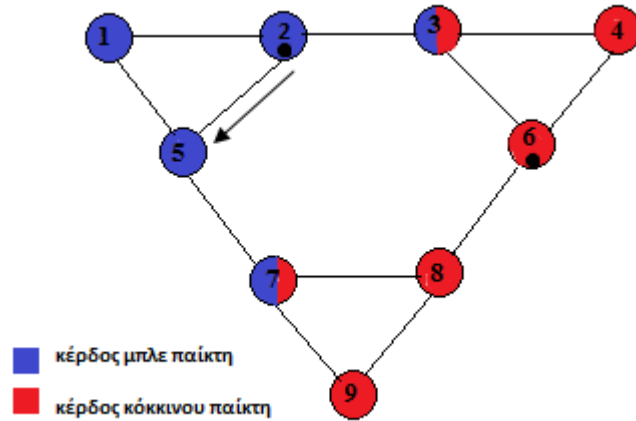
Η ύπαρξη ισορροπίας εξαρτάται από τον ίδιο γράφο και τον αριθμό των παικτών. Έχει δοθεί ένας απλός γράφος, ο οποίος δεν επιτρέπει την ισορροπία Nash, ακόμα κι όταν υπάρχουν μόνο 2 παίκτες στο παιχνίδι [5]. Το πιο πάνω παράδειγμα, στο Σχήμα 2.5, παρουσιάζει ακριβώς αυτό το προφίλ στρατηγικής, ενός απλού γράφου με 2 παίκτες (μπλε παίκτης και κόκκινος παίκτης) στο οποίο δεν έχουμε ισορροπία. Στην συνέχεια βρίσκουμε το κέρδος κάθε παίκτη, Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6 – συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος με κέρδη παικτών

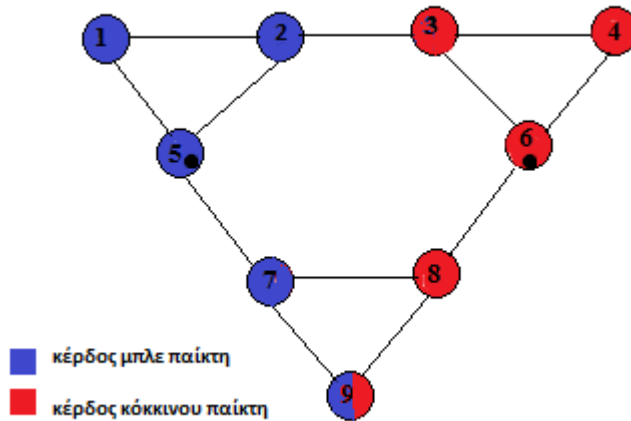
Ο μπλε παίκτης έχει κέρδος 4. Ο κόκκινος παίκτης έχει κέρδος 5, δηλαδή περισσότερο από τους μισούς κόμβους ($n/2$). Αφού το συνολικό κέρδος και των 2 παικτών μαζί ισούται με 9, τότε φαίνεται πως δεν υπάρχει ισορροπία Nash στο συγκεκριμένο γράφο.

Αλλάζοντας την στρατηγική του ο μπλε παίκτης μπορεί να αυξήσει το κέρδος του. Ο μπλε παίκτης καταλαμβάνει τον κόμβο 5, αντί τον κόμβο 2 της προηγούμενης περίπτωσης, βλέπε σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7 – συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος με αλλαγή στρατηγικής για τον μπλε παίκτη

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το κέρδος κάθε παίκτη, Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8 – κέρδη παικτών μετά την αλλαγή στρατηγικής για τον μπλε παίκτη

Ο μπλε παίκτης έχει κέρδος 4,5 (αύξηση κέρδους μετά την αλλαγή στρατηγικής).

Ο κόκκινος παίκτης έχει κέρδος 4,5.

Αφού ο μπλε παίκτης μπορεί να αυξήσει το κέρδος του με αλλαγή στρατηγικής (το οποίο μπορεί να επαναλαμβάνεται), φαίνεται καθαρά ότι ο συγκεκριμένος γράφος με 2 παίκτες δεν έχει ισορροπία. Στην τοποθέτηση αυτή, έχει αποδειχθεί [5] ότι, με

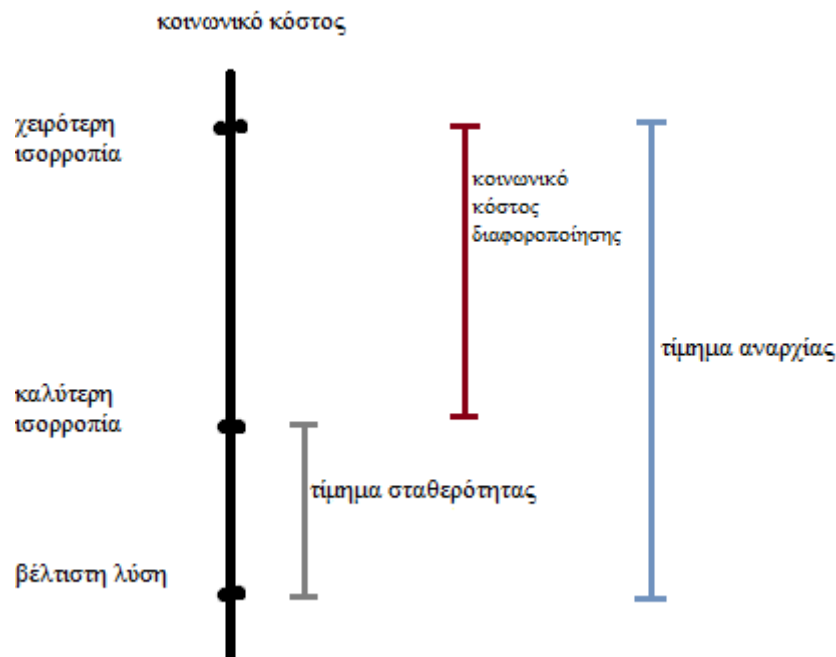
οποιαδήποτε τοποθέτηση, πάντοτε θα υπάρχει μία θέση των δύο παικτών όπου ο ένας θα μπορεί να αυξήσει το κέρδος του.

2.2.1 Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας

Οι πιο δημοφιλείς θεωρίες απόδοσης του συστήματος που έχουμε είναι το **τίμημα αναρχίας** [13] και το **τίμημα σταθερότητας** [3]. Το τίμημα αναρχίας καθορίζεται από το λόγο μεταξύ της χειρότερης αντικειμενικής τιμής της ισορροπίας στο παιχνίδι και της τιμής μιας βέλτιστης λύσης. Αντίθετα, το τίμημα σταθερότητας καθορίζεται από το λόγο μεταξύ της καλύτερης αντικειμενικής τιμής της ισορροπίας στο παιχνίδι και της τιμής μιας βέλτιστης λύσης.

Το **κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης** καθορίζεται από τον λόγο μεταξύ της χειρότερης και της καλύτερης γνήσιας ισορροπίας Nash. Υπενθυμίζεται ότι το προφίλ στρατηγικής EV^k αποτελεί **γνήσια ισορροπία Nash** όταν κάθε παίκτης επιλέγει θέση ντετερμινιστικά και κανένας από αυτούς δεν μπορεί να αυξήσει μονομερώς το κέρδος του με αλλαγή στρατηγικής.

Οι προαναφερόμενες τιμές απόδοσης φαίνονται διαγραμματικά στο πιο κάτω Σχήμα, 2.9



Σχήμα 2.9

Θεώρημα 3 [5]

Η απόφαση ύπαρξης ισορροπίας Nash σε γενικευμένους γράφους με αυθαίρετο πλήθος παικτών είναι NP-δύσκολη.

Η απόδειξη έγινε με αναγωγή σε γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα, το πρόβλημα 3-ΔΙΑΜΟΙΡΑΣΗ [10].

2.3 Παίγνια Voronoi σε κυκλικό μη κατευθυνόμενο γράφο

Στο σημείο αυτό γίνεται έρευνα στα παίγνια σε μη κατευθυνόμενους γράφους και την εξεύρεση ισορροπίας σε αυτούς.

2.3.1 Προφίλ και Ισορροπίες Nash

Ενώ κανονικά, όπως προαναφέρθηκε, το παιχνίδι παίζεται σε ακατεύθυντο κυκλικό γράφο $G(V,E)$, δίνεται μια αυθαίρετη μοντελοποίηση του παιχνιδιού για ευκολία [5]. Με $u_0, \dots, u_{l-1}$ συμβολίζονται οι κορυφές του γράφου που επιλέγονται από k παίκτες σε ένα προφίλ στρατηγικής f με

$l < k$, όπου η αρίθμηση γίνεται ανάλογα με τον προσανατολισμό του κύκλου. Για κάθε $j \in \mathbb{Z}_l$, θεωρούμε το $c_j \geq 1$ ως το πλήθος των παικτών που επιλέγουν την κορυφή u_j και το $d_j \geq 1$ ως το μήκος του κατευθυντού μονοπατιού από το u_j στο u_{j+1} σύμφωνα με τη φορά του κύκλου. Το προφίλ στρατηγικής καθορίζεται από τους αριθμούς $2l$ μέχρι την μετακίνηση των παικτών. Αναφορικά με την απόσταση, έχουμε $d_j = 1 + 2a_j + b_j$, για $0 \leq b_j \leq 1$, όπου το $2a_j + b_j$ αντιστοιχεί στο πλήθος των κόμβων που βρίσκονται μεταξύ των κορυφών u_j και u_{j+1} . Δηλαδή, αν $b_j = 1$, τότε υπάρχει ένας κόμβος μεταξύ, σε ίσες αποστάσεις, από τις κορυφές u_j και u_{j+1} . Σύμφωνα με τα πιο πάνω, το κέρδος του παίκτη i στην κορυφή u_j είναι:

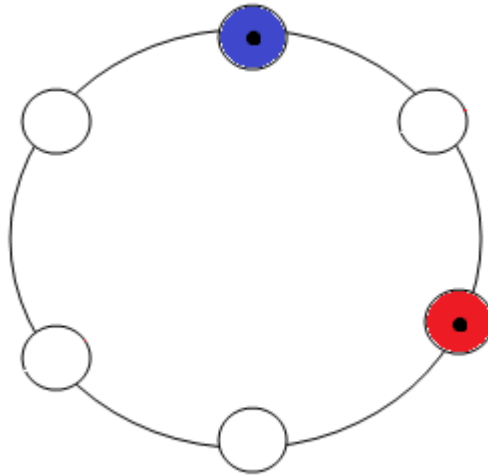
$$p_i := \frac{b_{j-1}}{c_j - 1 + c_j} + \frac{a_{j-1} + 1 + a_j}{c_j} + \frac{b_j}{c_j + c_{j+1}}$$

Θεώρημα 4 [15]

Δεδομένου ενός προφίλ στρατηγικής, έστω γ το ελάχιστο κέρδος μεταξύ όλων των παικτών, δηλαδή $\gamma := \min \{ p_i \mid 1 \leq i \leq k \}$. Το προφίλ αυτό είναι μία ισορροπία Nash αν και μόνο αν, για κάθε $j \in Z_l$ ισχύουν τα εξής:

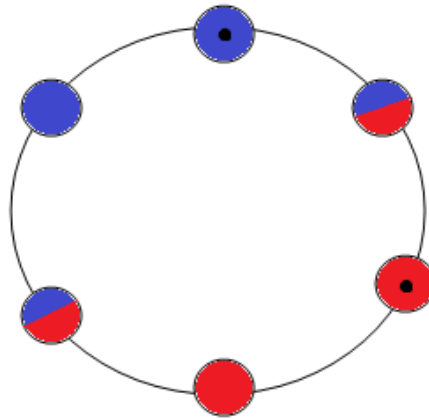
1. $c_j \leq 2$
 2. $d_j \leq 2\gamma$
 3. Αν $c_i \neq c_{i+1}$ τότε $\lfloor 2\gamma \rfloor$ είναι περιττό
 4. Αν $c_j = 1$ και $d_{j-1} = d_j = 2\gamma$ τότε το 2γ είναι περιττό
 5. Αν $c_j = c_{j+1} = 1$ και $d_{i-1} + d_i = d_{i+1} = 2\gamma$ τότε το 2γ είναι περιττό
 6. Αν $c_j = c_{j-1} = 1$ και $d_{i-1} = d_i + d_{i+1} = 2\gamma$ τότε το 2γ είναι περιττό
-

Πιο κάτω, στο Σχήμα 2.10, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μη κατευθυνόμενου κυκλικού γράφου με 2 παίκτες (μπλε παίκτης και κόκκινος παίκτης).



Σχήμα 2.10 – Παράδειγμα κυκλικού γράφου με 2 παίκτες

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το κέρδος κάθε παίκτη. Η θέση του παίκτη διακρίνεται με μία μαύρη τελεία στο εσωτερικό του κόμβου και οι κόμβοι που αντιστοιχούν στο κέρδος κάθε παίκτη έχουν το χρώμα του παίκτη. Το κέρδος φαίνεται στο Σχήμα 2.11.



Σχήμα 2.11 – Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος με τα κέρδη των παικτών.

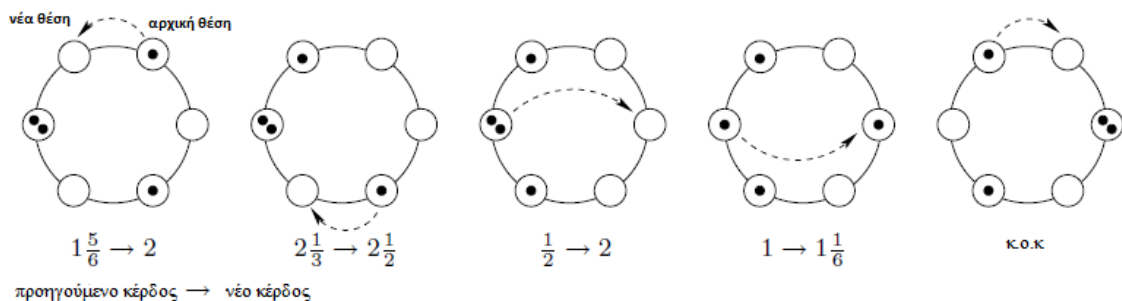
Κέρδος μπλε παίκτη: $1+1+1/2+1/2 = 3$

Κέρδος κόκκινου παίκτη: $1+1+1/2+1/2 = 3$

Με τον όρο **δυναμικό βέλτιστης αντίδρασης** εννοούμε την αύξηση του κέρδους του παίκτη με την μετακίνηση του, δηλαδή με την αλλαγή στρατηγικής του. Δηλαδή, ο παίκτης μπορεί να συνεχίσει να μετακινείται για πάντα, με το κέρδος του να αυξάνεται, χωρίς να καταλήξει σε ισορροπία.

Στο πιο κάτω σχήμα 2.12 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κυκλικού γράφου, όπου το δυναμικό βέλτιστης αντίδρασης μπορεί να επαλαμβάνεται για πάντα.

Π.χ. στην πρώτη περίπτωση, αρχικά το κέρδος του παίκτη πάνω δεξιά είναι $1\frac{5}{6}$, ενώ όταν μετακινηθεί στον κόμβο αμέσως αριστερά του το κέρδος του αυξάνεται σε 2.



Σχήμα 2.12 – Παράδειγμα γράφου όπου η δυναμική βέλτιστης απάντησης δεν συγκλίνει

Θεώρημα 5 [5]

Στους κυκλικούς γράφους, το δυναμικό βέλτιστης αντίδρασης δεν συγκλίνει σε γνήσια ισορροπία Nash.

Ωστόσο, το δυναμικό βέλτιστης αντίδρασης συγκλίνει σε γνήσια ισορροπία Nash για μία παραλλαγή του παιγνιδιού Voronoi. Η παραλλαγή αυτή είναι ίδια με την προαναφερόμενη των κυκλικών γράφων με τη διαφορά ότι οι παίκτες που είναι τοποθετημένοι στον ίδιο κόμβο έχουν κέρδος μηδέν.

Δεδομένου ότι υπάρχει η ισορροπία Nash, μελετείται το κοινωνικό κόστος της ισορροπίας Nash και κατά πόσο διαφοροποιείται για κάθε γράφο.

Το **κοινωνικό κόστος** ενός προφίλ στρατηγικής f [5] δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\text{cost}(f) := \sum_{v \in V} d(v, f)$$

Το **κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης** του παιγνιδιού ορίζεται από:

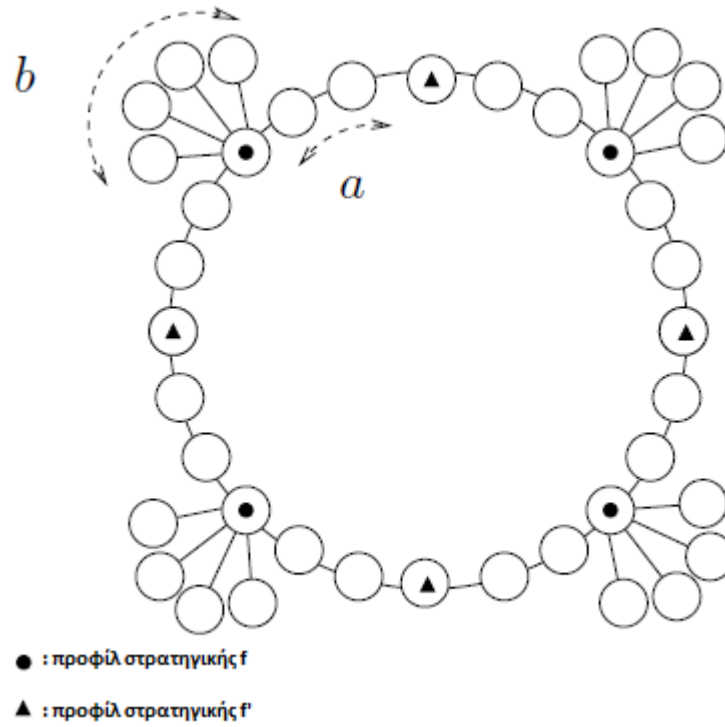
$$\frac{\text{cost}(f)}{\text{cost}(f')}$$

για όλες τις ισορροπίες Nash f και f' .

Σε περιπτώσεις μη συνδεδεμένων γράφων, το κοινωνικό κόστος και το κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης μπορούν να πάρουν τιμή άπειρο. Η μελέτη έχει γίνει μόνο για συνδεδεμένους γράφους όμως.

Θεώρημα 6 [5]

Υπάρχουν συνδεδεμένοι γράφοι στους οποίους το κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης είναι $\Omega(\sqrt{n/k})$ και $O(\sqrt{nk})$, όπου n το πλήθος των κόμβων και k το πλήθος των παικτών.



Σχήμα 2.13 – Παράδειγμα γράφου με υψηλό κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης

Το συνολικό πλήθος κόμβων του γράφου στο παράδειγμα του Σχήματος 2.13 είναι $n = k(2a + b + 2)$.

Τόσο το προφίλ στρατηγικής f όσο και το προφίλ στρατηγικής f' αποτελούν ισορροπίες Nash.

Κοινωνικό κόστος του προφίλ στρατηγικής $f = \Theta(kb + ka^2)$

Κοινωνικό κόστος του προφίλ στρατηγικής $f' = \Theta(kab + ka^2)$

Ο λόγος μεταξύ των 2 μας δίνει $\Theta(a) = \Theta(\sqrt{n/k})$.

Κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης: $\Omega(\sqrt{n/k})$ και $O(\sqrt{nk})$.

2.3.2 Χαρακτηρισμός Ισορροπίας Nash

Ο χαρακτηρισμός των ισορροπιών Nash στην έρευνα που προηγήθηκε [5] αποδείχθηκε λανθασμένος και απαιτούσε κάποιες τροποποιήσεις.

Εις βάθους έρευνα πραγματοποιήθηκε αργότερα, όπου όλα τα ερωτήματα γύρω από την ισορροπία Nash στα παίγνια Voronoi σε κυκλικούς γράφους έχουν διευθετηθεί [15]. Έχει δοθεί ο ακριβής χαρακτηρισμός, η αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ισορροπίας καθώς και το τίμημα αναρχίας και σταθερότητας.

Γενικά, ένα παίγνιο Voronoi σε κυκλικό γράφο, χαρακτηρίζεται από το πλήθος των κόμβων n και το πλήθος των παικτών k .

Το μοντέλο αποτελείται από ένα συνδεδεμένο ακατεύθυντο κυκλικό γράφο $G=(V,E)$ και το πλήθος των παικτών k , όπου $k \in \mathbb{N}$ και $k \leq |V|$. Επίσης υποθέτουμε ότι $k \leq n$, εκτός και αν πρόκειται για τετριμμένη δομή. Το σετ στρατηγικής κάθε παίκτη είναι V και το σετ των προφίλ στρατηγικής είναι $S := V^k$. Για κάθε κόμβο $v \in V$ έχουμε τη συνάρτηση:

$F_v := S \rightarrow 2^{[k]}, \quad F_v(x) := \arg \min_{i \in [k]} \text{dist}(v, s_i)$

όπου κάθε κόμβος ανατίθεται στο σύνολο των κοντινότερων παικτών.

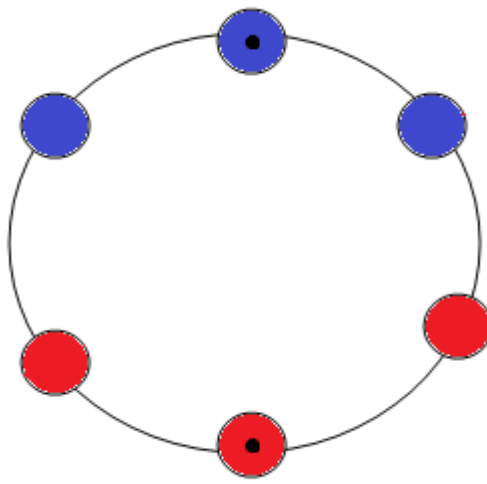
Το κέρδος ενός παίκτη i σε ένα προφίλ στρατηγικής s είναι:

$$u_i(s) := \sum_{v \in V : i \in F_v(s)} \frac{1}{|F_v(s)|}$$

Το άρθρο εστιάζει στην **ισορροπία Nash** [16], όπου κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει μονομερώς το κέρδος του αλλάζοντας στρατηγική. Συνεπώς, $s \in S$ είναι ισορροπία Nash αν και μόνο αν για κάθε $i \in [k]$ και κάθε $s'_i \in V$ ισχύει ότι:

$$u_i(s_{-i}, s'_i) \leq u_i(s).$$

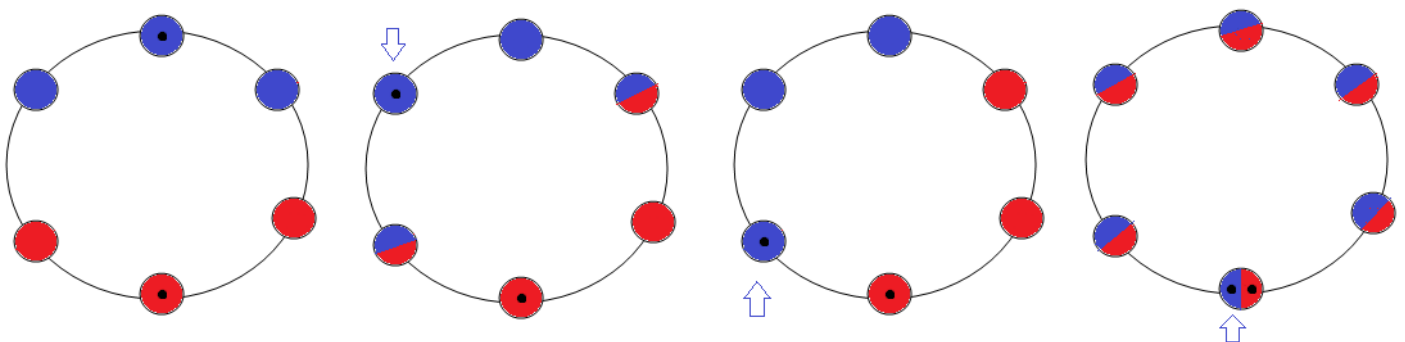
Παράδειγμα κυκλικού γράφου στο οποίο έχουμε ισορροπία φαίνεται πιο κάτω:



Σχήμα 2.14 – Ισορροπία σε κυκλικό γράφο

Στο Σχήμα 2.14, βλέπουμε ένα παράδειγμα ισορροπίας σε κυκλικό γράφο με 6 κόμβους και 2 παίκτες (μπλε παίκτης και κόκκινος παίκτης). Η περίπτωση 2 παικτών δίνει σε κάθε παίκτη κέρδος ίσο με n/k . Στην συγκεκριμένη περίπτωση το κέρδος κάθε παίκτη ισούται με $6/2=3$.

Στο Σχήμα 2.15 φαίνεται σχηματικά ότι το συγκεκριμένο παράδειγμα αποτελεί παράδειγμα ισορροπίας.



Σχήμα 2.15 – Ισορροπία σε κυκλικό γράφο. Αλλαγή στρατηγικής μπλε παίκτη. Τα τόξα συμβολίζουν την νέα θέση του μπλε παίκτη.

Στο Σχήμα 2.15 βλέπουμε σχηματικά την αλλαγή στρατηγικής του μπλε παίκτη. Η πρώτη περίπτωση αποτελεί την αρχική περίπτωση, όπου οι 2 παίκτες ισαπέχουν ο ένας από τον άλλο και το κέρδος και των 2 ισούται με 3. Στην δεύτερη περίπτωση, έχουμε την πρώτη μετακίνηση του μπλε παίκτη στο σημείο όπου δείχνει το τόξο. Το κόστος των 2 παικτών παραμένει το ίδιο και εξακολουθεί να ισούται με 3. Στην τρίτη περίπτωση, έχουμε τη δεύτερη μετακίνηση του μπλε παίκτη στο σημείο όπου δείχνει το τόξο. Το κόστος των 2 παικτών παραμένει το ίδιο και εξακολουθεί να ισούται με 3.

Στην τέταρτη περίπτωση, ο παίκτης μετακινείται στον κόμβο του κόκκινου παίκτη και συνεπώς έχουμε και τους 2 παίκτες στον ίδιο κόμβο. Για το λόγο αυτό μοιράζονται όλους τους κόμβους του γράφου παίρνοντας ίσο μερίδιο από τον καθένα. Και σε αυτή την περίπτωση το κόστος των 2 παικτών παραμένει 3. Οι περιπτώσεις που αφορούν το δεξιό ημισφαίριο του κυκλικού γράφου δεν χρειάζεται να αναλυθούν σχηματικά γιατί παρουσιάζουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά του αριστερού ημισφαιρίου που δείχθηκαν στις περιπτώσεις 2 και 3 (επειδή πρόκειται για κύκλο).

Τα ίδια αποτελέσματα λαμβάνουμε και για τις αντίστοιχες μετακινήσεις του κόκκινου παίκτη. Η μετακίνηση ενός παίκτη με βάση την αρχική του θέση (αλλαγή στρατηγικής του), δεν του αυξάνει μονομερώς το κέρδος του. Είδαμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το κέρδος για κάθε παίκτη είναι 3. Για το λόγο αυτό, το συγκεκριμένο παράδειγμα αποτελεί ισορροπία.

2.3.2.1 Τίμημα Αναρχίας και Τίμημα Σταθερότητας

Στην ισορροπία Nash, τίθεται το εξής ερώτημα: «Αν σε ένα παιγνίδι υπάρχει προφίλ ισορροπίας Nash, σε ποιο βαθμό μπορεί το κοινωνικό κόστος να μειωθεί, λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς του παίκτη;» Για το ερώτημα αυτό, έχουν προταθεί πολλές μετρικές, μεταξύ των οποίων το **τίμημα αναρχίας** [13] και το **τίμημα σταθερότητας** [3], που αναφέρθηκαν και στην ενότητα 2.2.1.

Το **κοινωνικό κόστος** (SC) δίνεται από τον εξής τύπο:

$$SC(s) := \sum_{v \in V} \min_{i \in [k]} \{ \text{dist}(v, s_i) \}$$

Η **βέλτιστη λύση** (OPT) δίνεται από τον εξής τύπο:

$$OPT := \min_{s \in S} \{ SC(s) \}$$

Το **τίμημα αναρχίας** (PoA) [13] δίνεται από το λόγο της χειρότερης περίπτωσης μεταξύ της ισορροπίας Nash (I.N. – Ισορροπία Nash) και της βέλτιστης τιμής (OPT).

$$PoA := \max_{s \text{ είναι IN}} \frac{SC(s)}{OPT}$$

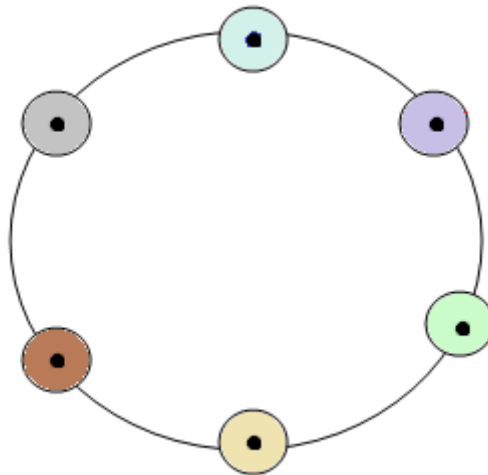
Το **τίμημα σταθερότητας** (PoS) [3] δίνεται από το λόγο της καλύτερης περίπτωσης μεταξύ της ισορροπίας Nash (I.N. – Ισορροπία Nash) και της βέλτιστης τιμής (OPT).

$$\text{PoS} := \min_{s \text{ είναι IN}} \frac{\text{SC}(s)}{\text{OPT}}$$

Να σημειωθεί ότι για τους συγκεκριμένους λόγους ισχύουν τα εξής:

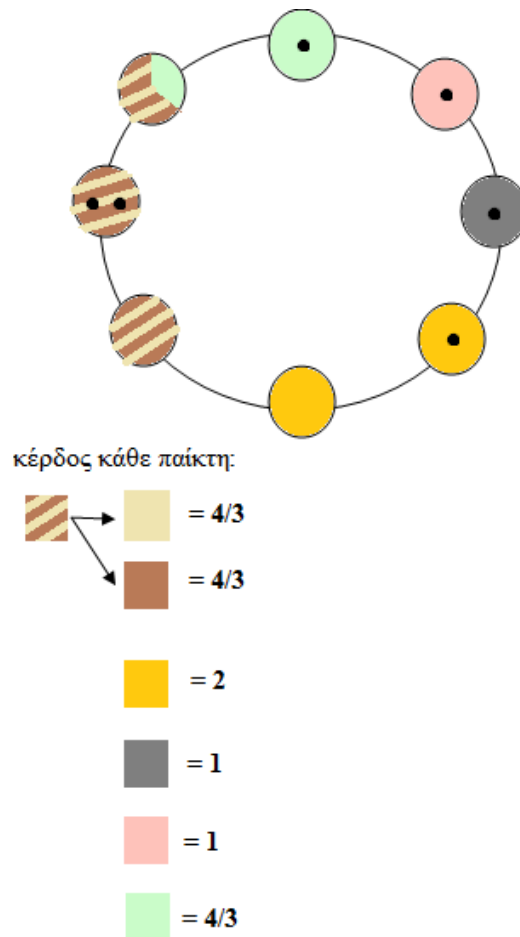
- $\frac{0}{0} = 1$
- $\frac{x}{0} = \infty$ (για οποιοδήποτε $x > 0$)

Πιο κάτω, στο Σχήμα 2.16 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ισορροπίας Nash όπου το κοινωνικό είναι μηδέν (λόγω του ότι όλες οι αποστάσεις είναι μηδενικές).



Σχήμα 2.16 – Ισορροπία με μηδενικό κοινωνικό κόστος.

Πιο κάτω, στο Σχήμα 2.17, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κυκλικού γράφου με 8 κόμβους και 6 παίκτες. Κάθε παίκτης παρουσιάζεται με διαφορετικό χρώμα. Παίκτες υπάρχουν στους κόμβους με έντονη μαύρη τελεία.



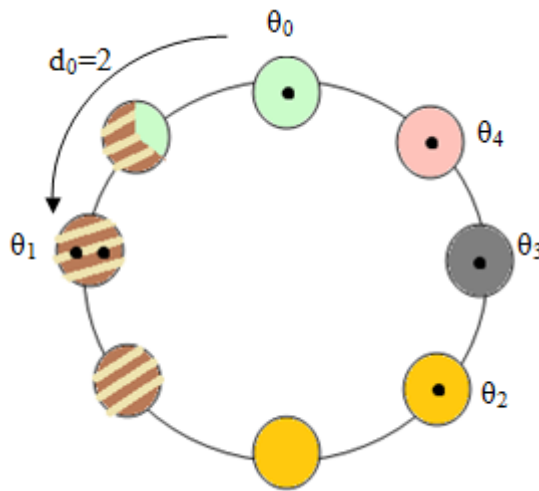
Σχήμα 2.17 – Παράδειγμα κυκλικού γράφου με το κέρδος κάθε παίκτη.

Σύμφωνα με το σχήμα 2.17 έχουμε τις εξής τιμές για το κοινωνικό κόστος (SC) και τη βέλτιστη λύση (OPT):

SC = 3,

OPT = 2.

Παρέχεται επίσης ένας ισχυρός χαρακτηρισμός της Ισορροπίας Nash για τα παίγνια Voronoi σε κυκλικούς γράφους με $n \in \mathbb{N}$ κόμβους και $k \in [n]$ παίκτες [15].



Σχήμα 2.18 – Παράδειγμα κυκλικού γράφου

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.18, με $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_i$ αναπαριστούνται οι κρατημένοι με παίκτη/παίκτες κόμβοι του γράφου, με την αρίθμηση να προχωρά αντίστροφα από τη φορά του ρολογιού.

Η απόσταση του ενός κρατημένου με παίκτη κόμβου από τον επόμενο ορίζεται από το $d_i = \text{dist}(\theta_i, \theta_{i+1})$. Π.χ. στο πιο πάνω σχήμα, η απόσταση του κόμβου θ_0 από τον κόμβο θ_1 συμβολίζεται με d_0 και ισούται με 2.

Το πλήθος των παικτών στον κόμβο θ_i αναπαριστάται με c_i . Π.χ. στον κόμβο θ_1 , $c_1=2$.

Θεώρημα 7 [15]

Δεδομένου γράφου $C(n,k)$, ένα προφίλ στρατηγικής $s \in S$ με ελάχιστο κέρδος $\gamma := \min_{i \in Z} \{v_i\}$ είναι ισορροπία Nash [16] αν και μόνο αν, για κάθε $i \in Z$, ισχύουν τα παρακάτω:

- $c_i \leq 2$ όπου κανένας κόμβος δεν πρέπει να μοιράζεται από περισσότερους από 2 παίκτες.
- $d_i \leq 2\gamma$ όπου η απόσταση μεταξύ δύο κρατημένων κόμβων δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη γιατί αν κάποιος παίκτης μετακινηθεί ενδιάμεσα τους μπορεί να αποκτήσει κέρδος μεγαλύτερο του γ .
- $c_i \neq c_{i+1} \Rightarrow [2\gamma] \text{ odd}$
- $c_i = 1, d_{i-1} = d_i = 2\gamma \Rightarrow 2\gamma \text{ odd}$
- $c_i = c_{i+1} = 1, d_{i-1} + d_i = d_{i+1} = 2\gamma \Rightarrow 2\gamma \text{ odd}$
 $c_i = c_{i-1} = 1, d_{i-1} = d_i + d_{i+1} = 2\gamma \Rightarrow 2\gamma \text{ odd}$

Όσο αφορά την ύπαρξη ισορροπίας, έχει επίσης αποδειχθεί [15] πως:

Θεώρημα 8 [15]

Ένας κυκλικός γράφος με $n \in \mathbb{N}$ κόμβους και $k \in [n]$ παίκτες, έχει ισορροπία Nash αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής αναγκαίες και ικανές συνθήκες:

$$k \leq \frac{2n}{3} \quad \text{ή} \quad k \geq n.$$

Ένας κυκλικός γράφος $C(n,k)$ έχει **κοινό προφίλ στρατηγικής** όταν $\ell = k$ και για κάθε

$$i \in Z_k : d_i \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \right\}.$$

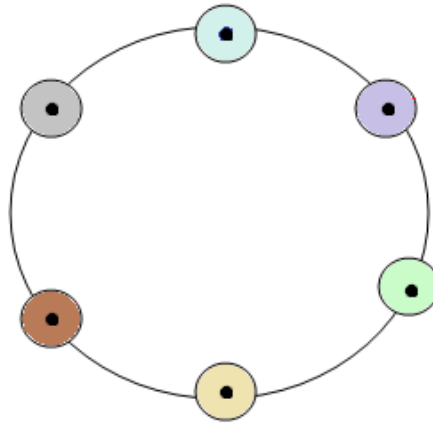
Θεώρημα 9 [15]

Αν $k \leq \frac{2n}{3}$ ή $k = n$ τότε ο κυκλικός γράφος $C(n,k)$ έχει κοινό προφίλ στρατηγικής το οποίο είναι ισορροπία Nash και έχει βέλτιστο κοινωνικό κόστος.

Στο Σχήμα 2.19 παρουσιάζεται ένας κυκλικός γράφος, όπου το πλήθος των κόμβων του ισούται με το πλήθος των παικτών ($k=n$). Συνεπώς, $s = (0,1,\dots,n-1)$.

Δηλαδή, $\ell = n$, $(c_i)_{i \in [n]} = (d_i)_{i \in [n]} = (1,\dots,1)$.

Η απόσταση κάθε παίκτη από τον επομενο ισούται με 1.



Σχήμα 2.19 – Παράδειγμα κοινής ισορροπίας Nash ($n=k$)

Επίσης, στην περίπτωση του $k=n$, ισχύει ότι το κοινωνικό κόστος της καλύτερης περίπτωσης ισορροπίας Nash έχει τιμή 0. Στην περίπτωση που το n είναι άρτιο, τότε η ισορροπία έχει κοινωνικό κόστος ίσο με $n/2$. Διαφορετικά, δεν υπάρχει ισορροπία.

Θεώρημα 10 [15]

Τα κοινά προφίλ στρατηγικής είναι βέλτιστα, γι' αυτό και αν $k \leq \frac{2n}{3}$ ή $k = n$ το τίμημα σταθερότητας ισούται με 1.

Έχει επίσης αποδειχθεί ότι:

Θεώρημα 11 [15]

Το τίμημα αναρχίας είναι το πολύ $\frac{9}{4}$

Θεώρημα 12 [15]

Δεδομένου αυθαίρετου παίγνιου Voronoi $C(n,k)$ σε ισορροπία, όπου $k \leq n/2$ και

$\gamma := \frac{1}{2} \cdot \lfloor 2n/k \rfloor$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εάν το γ είναι περιττός ακέραιος μεγαλύτερος του 3, τότε το κοινωνικό κόστος είναι μικρότερο ή ίσο από $\frac{9}{4}$ φορές τη βέλτιστη λύση. $SC(s) \leq \frac{9}{4} OPT$
 - Αλλιώς, $SC(s) \leq 2 OPT$.
-

Θεώρημα 13 [15]

Αν $\frac{n}{2} < k \leq \frac{2n}{3}$ τότε η καλύτερη περίπτωση ισορροπίας έχει βέλτιστο κοινωνικό

κόστος: $OPT = n-k$.

Λαμβάνουμε υπόψη αντίστοιχα, ότι η χειρότερη περίπτωση ισορροπίας έχει κοινωνικό

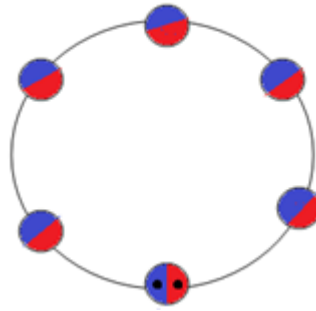
κόστος: $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor \leq 2OPT$

Θεώρημα 14 [15]

Αν $k=n$ τότε η καλύτερη περίπτωση ισορροπίας έχει κοινωνικό κόστος 0.

Αν n είναι άρτιο τότε η μοναδική άλλη ισορροπία έχει κοινωνικό κόστος $n/2$, αλλιώς δεν υπάρχει άλλη ισορροπία.

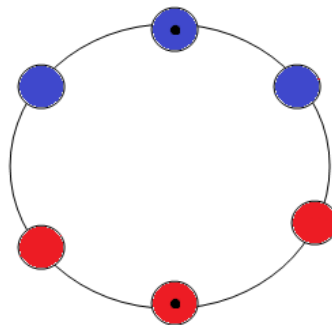
Η χειρότερη περίπτωση παρατηρείται όταν $n=3k$ και το k είναι άρτιος ακέραιος.



Σχήμα 2.20 – Παράδειγμα χειρότερης περίπτωσης ισορροπίας

Στο παράδειγμα του σχήματος 2.20, έχουμε $n=6$ κόμβους και $k=2$ παίκτες (μπλε παίκτης και κόκκινος παίκτης). Ο κάθε παίκτης έχει ως κέρδος, από κοινού τους κόμβους του γράφου, δηλαδή 3. Επίσης ισχύει το $n=3k$ και το ότι το k είναι άρτιος ακέραιος. Το κοινωνικό κόστος σε αυτή την περίπτωση ισούται με 9.

Η βέλτιστη λύση του γραφήματος στο σχήμα 2.21 έχει κοινωνικό κόστος $SC = OPT = 4$ και φαίνεται πιο κατω:



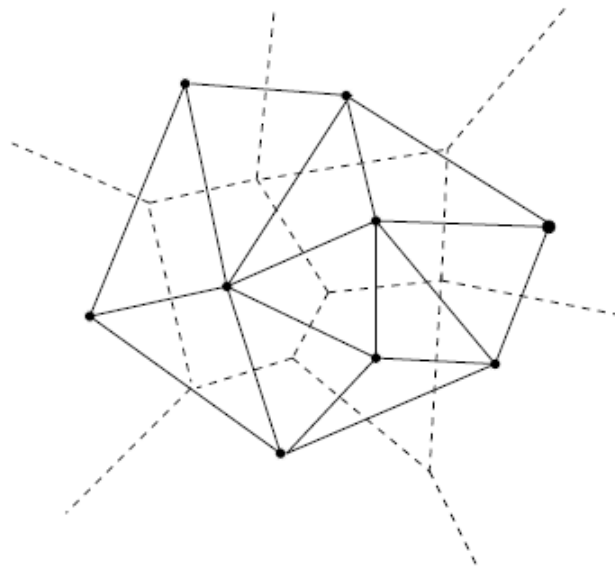
Σχήμα 2.21 – Παράδειγμα βέλτιστης λύσης

2.4 Τριγωνοποίηση Delaunay

Η τριγωνοποίηση Delaunay εφευρέθηκε από τον Ρώσο Boris Nikolaevich Delaunay το 1934. Η διαφορά της τριγωνοποίησης Delaunay με τα διαγράμματα Voronoi είναι ότι τα διαγράμματα Voronoi δεν σχετίζονται με κύκλους αλλά με ευθύγραμμα τμήματα, ενώ η τριγωνοποίηση Delaunay σχετίζεται αποκλειστικά με κύκλους. Αν ενώσουμε τα κέντρα των τριγώνων της τριγωνοποίησης, τα οποία δεν έχουν κανένα αρχικό σημείο, θα βρούμε το διάγραμμα Voronoi.

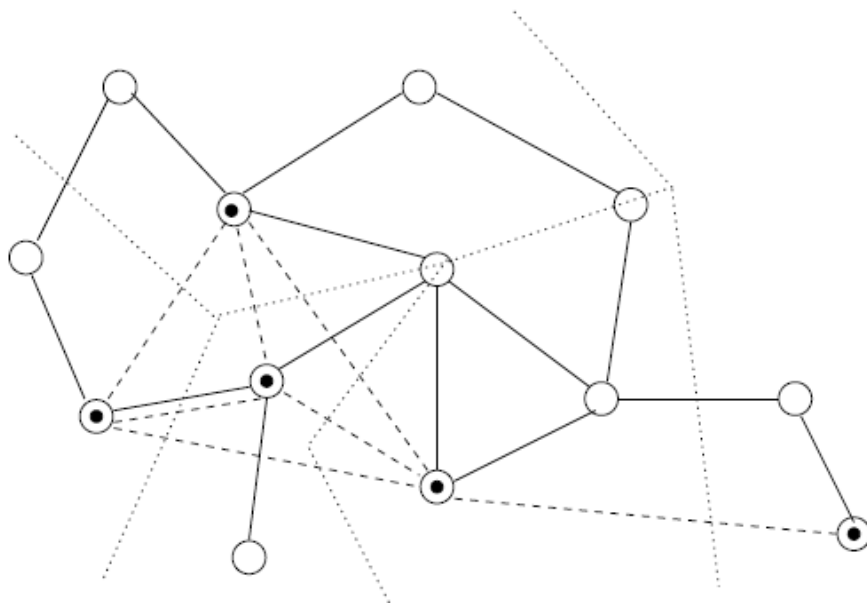
Μελέτη στην τριγωνοποίηση [5] παρατηρείται όπου σε συνεχές επίπεδο, η τριγωνοποίηση Delaunay για ένα σύνολο P από σημεία, είναι μία τριγωνοποίηση τέτοια ώστε κανένα σημείο του P δεν βρίσκεται μέσα στο περίγραμμα κάποιου τριγώνου.

Η έννοια της τριγωνοποίησης Delaunay σε γράφο είναι μία γενίκευση της τριγωνοποίησης Delaunay σε συνεχές επίπεδο. Η μοντελοποιήσεις σε συνεχές επίπεδο και διακριτό επίπεδο φαίνονται στα Σχήματα 2.22 και 2.23 αντίστοιχα.



Σχήμα 2.22 – Διάγραμμα Voronoi και τριγωνοποίηση Delaunay σε συνεχές επίπεδο.

Στο πιο πάνω Σχήμα 2.22, με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το διάγραμμα Voronoi και με συνεχή γραμμή η τριγωνοποίηση Delaunay.



Σχήμα 2.23 – Διάγραμμα Voronoi και τριγωνοποίηση Delaunay σε διακριτό επίπεδο.

Στο Σχήμα 2.23, με συνεχείς τελείες φαίνεται το διάγραμμα Voronoi, με διακεκομμένη γραμμή η τριγωνοποίηση Delaunay, με συνεχή γραμμή τα άκρα του γράφου και με έντονη μαύρη τελεία οι παίκτες.

Το μοντέλο της τριγωνοποίησης Delaunay [5] έχει ως εξής:

Η **τριγωνοποίηση Delaunay**, σύμφωνα με το προφίλ στρατηγικής f , είναι ένας γράφος H_f με k παίκτες στο προφίλ f . Στο γράφο H_f υπάρχει ένα άκρο (i, j) είτε υπάρχει κόμβος v στο G με $F_{i,v} > 0$ και $F_{j,v} > 0$, είτε υπάρχει ένα άκρο (v, v') στο G με $F_{i,v} > 0$ και $F_{j,v'} > 0$. Έπειτα χρειάζεται να διαχωρίσουμε την τριγωνοποίηση Delaunay σε μικρά τμήματα, τα λεγόμενα αστέρια. Δεδομένου γράφου $G(V, E)$, ένα **αστέρι** είναι ένα σύνολο κόμβων $A \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|A| \geq 2$. Επίσης υπάρχει ένας κεντρικός κόμβος $v_0 \in A$, ώστε για κάθε $v \in A$ όπου $v \neq v_0$, έχουμε $(v_0, v) \in E$.

Θεώρημα 15 [5]

Για κάθε συνδεδεμένο γράφο $G(V, E)$, V μπορεί να διαχωριστεί σε αστέρια.

Όταν γίνει ο διαχωρισμός σε αστέρια, τα κέντρα των αστεριών διαμορφώνουν ένα κυρίαρχο σύνολο του γράφου. Παρ' όλα αυτά, οι κόμβοι στο σύνολο αυτό δεν είναι απαραίτητα τα κέντρα οποιασδήποτε διαμοίρασης σε αστέρια ενός γράφου.

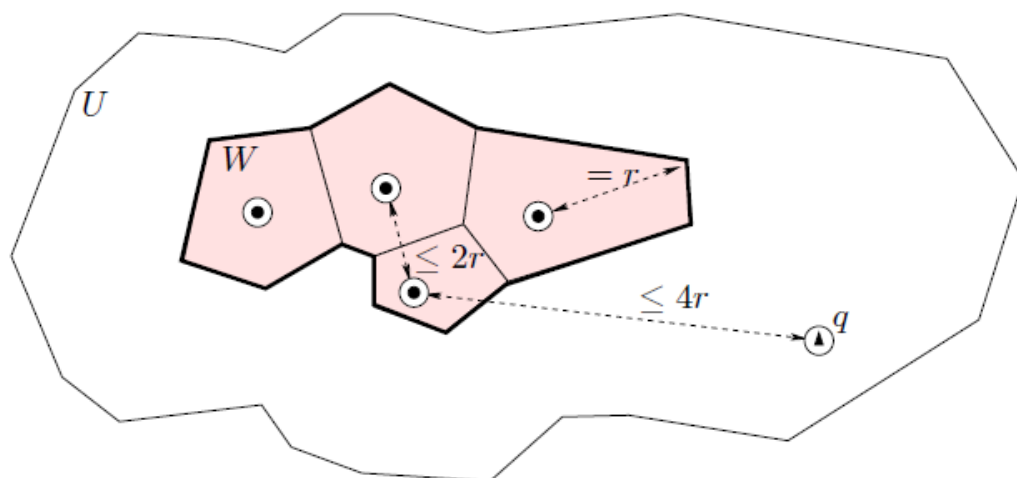
Η διαμοίραση δείχνει πως:

Θεώρημα 16 [5]

Δεδομένων 2 διαφορετικών ισορροπιών Nash f και f' , κάθε παίκτης στην f δεν είναι πολύ μακριά από κάποιο παίκτη στην f' .

Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 2.24.

Τα Voronoi κελιά του προφίλ στρατηγικής f ομαδοποιούνται σε χωρία. Για ένα συγκεκριμένο χωρίο, το οποίο παρουσιάζεται στο πιο κάτω σχήμα, έστω r η μέγιστη απόσταση από ένα κόμβο προς τον κοντινότερο παίκτη.



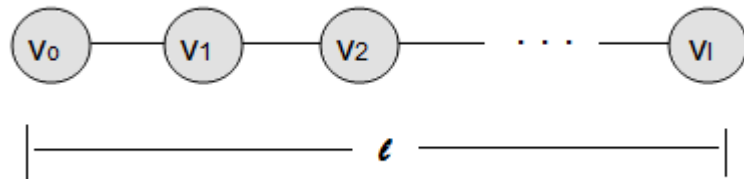
Σχήμα 2.24 – Χωρίο Voronoi κελλιού

Ένας από τους παίκτες του προφίλ στρατηγικής f' πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση το πολύ $4r$ από κάθε παίκτη του προφίλ στρατηγικής f στο χωρίο αυτό.

2.5 Παίγνια Voronoi σε Μεταβατικούς Γράφους

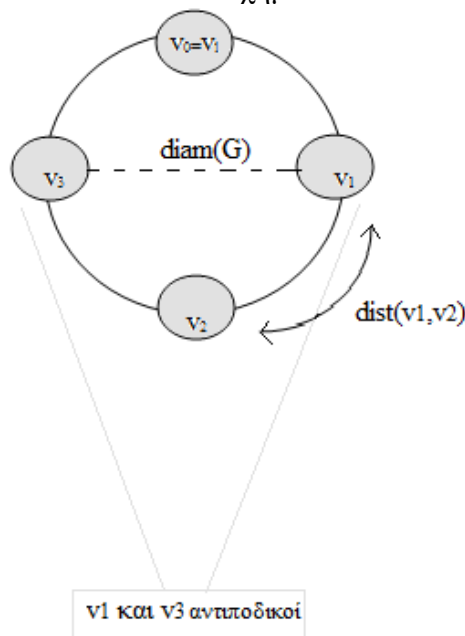
Μελέτη στην γνήσια ισορροπία Nash στα παίγνια Voronoi πραγματοποιήθηκε δίνοντας το πιο κάτω μοντέλο [8]:

Δίνεται ένας απλός, συνδεδεμένος και ακατεύθυντος γράφος $G = \langle V(G), E(G) \rangle$. Το **μονοπάτι** στον γράφο G είναι μία ακολουθία από κόμβους $v_0, v_1, v_2, \dots, v_i$ ώστε για κάθε δείκτη $i \in [1]$, $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. Το **μήκος του μονοπατιού** δίνεται από το ℓ . Παράδειγμα μονοπατιού σε γράφο φαίνεται στο πιο κάτω Σχήμα 2.25:



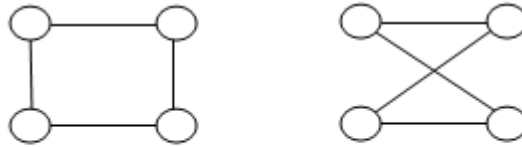
Σχήμα 2.25 – Παράδειγμα Μονοπατιού

Ένας **κύκλος** είναι ένα μονοπάτι $v_0, v_1, v_2, \dots, v_i$ όπου $v_0 = v_i$. Για ένα ζεύγος κόμβων $u, v \in V(G)$, η απόσταση μεταξύ u και v , η οποία συμβολίζεται με $\text{dist}_G(u, v)$ ή $\text{dist}(u, v)$ είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ u και v . Η διάμετρος του G δίνεται από την μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των κόμβων του γράφου, δηλαδή $\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} \text{dist}(u, v)$. Επίσης, το ζεύγος κόμβων $u, v \in V(G)$ είναι **αντιποδικό** αν $\text{dist}(u, v) = \text{diam}(G)$ και συνεπώς το u είναι ένας αντίποδας στο v και αντίστροφα. Παράδειγμα κύκλου φαίνεται στο πιο κάτω Σχήμα 2.26:



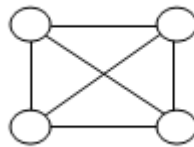
Σχήμα 2.26 – Παράδειγμα Κύκλου

Δύο γράφοι $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ είναι **ισομορφικοί** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\varphi : V \rightarrow V'$ ώστε για κάθε ζεύγος κόμβων $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$ αν και μόνο αν $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'$. Το φ είναι ένας ισομορφισμός από το G στο G' . Δηλαδή, 2 γράφοι είναι ισομορφικοί αν με κατάλληλη αρίθμηση των κορυφών των 2 γράφων, υπάρχει αντιστοίχιση στο ίδιο ακριβώς μητρώο σύνδεσης. Βλέπε Σχήμα 2.27.



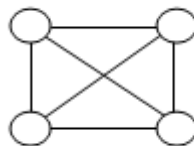
Σχήμα 2.27 – Παράδειγμα ισομορφικών γράφων

Ένας **αυτομορφισμός** του G είναι ένας ισομορφισμός από το G στον εαυτό του. Στην περίπτωση του αυτομορφισμού φ , για κάθε ζεύγος κόμβων $u, v \in V(G)$, $\text{dist}_G(u, v) = \text{dist}_G(\varphi(u), \varphi(v))$. Βλέπε Σχήμα 2.28.



Σχήμα 2.28 – Παράδειγμα αυτομορφισμού

Ένας γράφος G είναι **μεταβατικός κατά τις κορυφές του** αν για κάθε ζεύγος κόμβων $u, v \in V$ υπάρχει ένας αυτομορφισμός φ του G τέτοιος ώστε $\varphi(u) = v$. Σχηματικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένας γράφος μεταβατικός κατά τις κορυφές του φαίνεται ίδιος από κάθε κόμβο. Βλέπε Σχήμα 2.29.



Σχήμα 2.29 – Παράδειγμα γράφου μεταβατικού κατά τις κορυφές του

Ο γράφος G είναι **γενναιόδωρα μεταβατικός κατά τις κορυφές του** αν για κάθε ζεύγος κόμβων $u, v \in V$ υπάρχει ένας αυτομορφισμός φ του G τέτοιος ώστε $\varphi(u)=v$ και $\varphi(v)=u$, ώστε κάθε ζεύγος κόμβων να μπορεί να ανταλλαχθεί.

Ο γράφος G είναι **φιλικός** αν ισχύουν οι 2 πιο κάτω συνθήκες:

- Ο γράφος G είναι γενναιόδωρα μεταβατικός κατά τις κορυφές του.
- Για κάθε ζεύγος από αντίποδες κόμβους $\alpha, \beta \in V(G)$, και για κάθε αυθαίρετο κόμβο $\gamma \in V(G)$, ο γ είναι στο συντομότερο μονοπάτι μεταξύ α και β .

Συνεπώς, κάθε κόμβος σε ένα φιλικό γράφο, έχει ένα μοναδικό αντίποδα.

2.5.1 Διμερής Τόρος d-Διαστάσεων

Ως διάσταση ορίζεται ένας αυθαίρετος ακέραιος $d \geq 2$.

Ως πλευρές ορίζεται η ακολουθία από ακέραιους $p_1, \dots, p_d \geq 1$.

Ένα από τα πιο γνωστά δίκτυα γράφων μεταβατικών κατά τις κορυφές τους και παράδειγμα φιλικού γράφου, είναι ο **διμερής τόρος d διαστάσεων** [8] ο οποίος συμβολίζεται με $T_d = T_d[2p_1, \dots, 2p_d]$.

Έχουμε τον γράφο T_d με $V(T_d) = \{0, 1, \dots, 2p_1 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, 2p_d - 1\}$ και $E(T_d)$ όπου περιέχονται οι ακμές $\{\alpha, \beta\}$ ώστε α και β να διαφέρουν σε ακριβώς ένα στοιχείο $j \in [d]$ και $|\alpha_j - \beta_j| \equiv 1 \pmod{2p_j}$

Η διάσταση ακμών $\{\alpha, \beta\} \in E(T_d)$ είναι η διάσταση $j \in [d]$ στην οποία τα α και β διαφέρουν.

Ο διμερής γράφος T_d είναι το καρτεσιανό γινόμενο των d άρτιων κύκλων, όπου ο κύκλος στη διάσταση $j \in [d]$ έχει μήκος $2p_j$.

Θεώρημα 18 [8]

Ο διμερής τόρος d διαστάσεων $T_d = T_d[2p_1, \dots, 2p_d]$, σε αντίθεση με τους μη διμερή τόρους, είναι φιλικός.

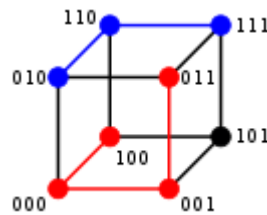
2.5.2 Υπερκύβος d-Διαστάσεων

Ο υπερκύβος d διαστάσεων H_d [8] είναι ο τόρος d διαστάσεων $T_d = T_d[2, \dots, 2]$, δηλαδή η ειδική περίπτωση όπου όλες οι πλευρές ισούνται με 2. Κάθε κορυφή είναι ένα δυαδικό διάνυσμα $a \in \{0, 1\}^d$ και η απόσταση μεταξύ 2 κορυφών είναι η απόσταση Hamming μεταξύ των 2 δυαδικών διανυσμάτων. Συνεπώς η διάμετρος του H_d ισούται με τη διάσταση d .

Γενικό παράδειγμα υπολογισμού της απόστασης Hamming παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.30

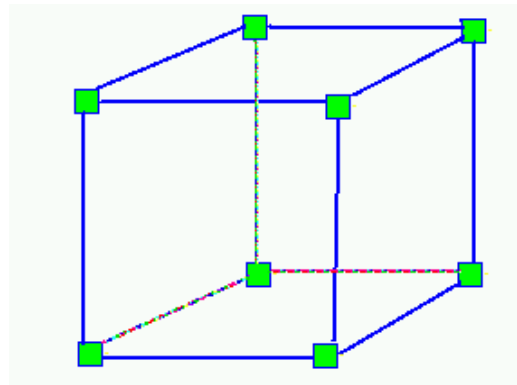
100->011 έχει απόσταση 3 (κόκκινο μονοπάτι)

010->111 έχει απόσταση 2 (μπλε μονοπάτι)

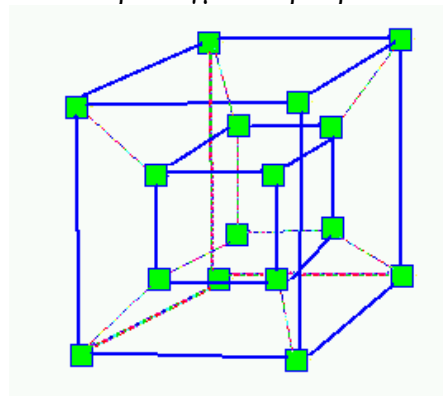


Σχήμα 2.30 – Γενικό παράδειγμα υπολογισμού απόστασης Hamming

Στα Σχήματα 2.31 και 2.32 παρουσιάζονται παραδείγματα υπερκύβου 3 διαστάσεων και 4 διαστάσεων αντίστοιχα.



Σχήμα 2.31 – Παράδειγμα υπερκύβου 3 διαστάσεων

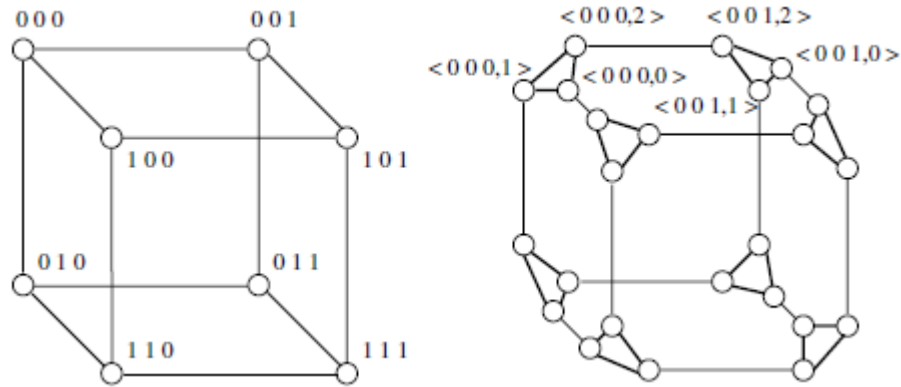


Σχήμα 2.32 – Παράδειγμα υπερκύβου 4 διαστάσεων

2.5.3 Κόκλοι Συνδεδεμένοι Με Κύβους d-Διαστάσεων

Οι **κυβικά συνδεδεμένοι κύκλοι d-διαστάσεων** CCC_d [14] κατασκευάζονται από τον υπερκύβο d-διαστάσεων H_d , αντικαθιστώντας κάθε κόμβο του H_d με ένα κύκλο d κόμβων στον CCC_d . Ο CCC_d δεν αποτελεί φιλικό γράφο. Το άκρο i-οστής διάστασης που συμπίπτει με τον κόμβο του υπερκύβου ενώνεται στον ισοστό κόμβο του αντίστοιχου κύκλου του CCC_d .

Στο παρακάτω Σχήμα 2.33 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα υπερκύβου μαζί με ένα παράδειγμα CCC_d 3 διαστάσεων.



Σχήμα 2.33 – παραδείγματα υπερκύβου H_3 και CCC_3 αντίστοιχα

2.5.4 Παίγνια Voronoi

Όσο αφορά τα παίγνια Voronoi σε μεταβατικούς γράφους [8], δόθηκε ο εξής ορισμός:

Ένα **παίγνιο Voronoi** $\langle G, [k] \rangle$ είναι το στρατηγικό παιχνίδι $\langle [k], \{S_i\}_{i \in [k]}, \{U_i\}_{i \in [k]} \rangle$ με ακέραιο $k \geq 2$ όπου για κάθε παίκτη $i \in [k]$:

$$S_i = V(G)$$

και για κάθε προφίλ $s \in S_1 \times \dots \times S_k$ το **κέρδος** του παίκτη i στο προφίλ s δίνεται από

$$U_i(s) = \sum_{v \in \text{Vori}(s)} \frac{1}{\mu_v(s)}$$

Όπου το **κελί Voronoi** του παίκτη $i \in [k]$ στο προφίλ s είναι το σύνολο

$$\text{Vori}(s) = \{v \in V(G) \mid \text{dist}(s_i, v) \leq \text{dist}(s_{i'}, v) \text{ για κάθε παίκτη } i' \in [k]\}$$

και η **πολλαπλότητα** του κόμβου $v \in V(G)$ στο προφίλ s είναι ο ακέραιος $\mu_v(s) = |\{i' \in [k] \mid v \in \text{Vori}'(s)\}|$.

Όσο αφορά την Ισορροπία Nash έχουμε το εξής:

Για ένα προφίλ s και ένα παίκτη $i \in [k]$, ο συμβολισμός $s_{-i} \oplus v$ δηλώνει πως το προφίλ που παίρνουμε αντικαθιστώντας στον κόμβο s_i στο s με τον κόμβο v .

Συνεπώς, το προφίλ s είναι μία **ισορροπία Nash** [16] αν για κάθε παίκτη $i \in [k]$, για κάθε κόμβο $v \in V(G)$, $U_i(s) \geq U_i(s_{-i} \oplus v)$.

Έστω δύο προφίλ s και t . Λέμε ότι s και t είναι **ισοδύναμα** αν υπάρχει ένας αυτομορφισμός φ του G τέτοιος ώστε $t = \varphi(s)$. Παρατηρείται, επίσης, πως για ένα ζεύγος ισοδύναμων προφίλ s και t και για κάθε παίκτη $i \in [k]$, τα κέρδη τους είναι ισοδύναμα $U_i(s) = U_i(t)$.

Το προφίλ s είναι **συμμετρικό** αν κάθε ζεύγος παικτών $i, i' \in [k]$ είναι συμμετρικό για το s . Συνεπώς, για κάθε ζεύγος παικτών $i, i' \in [k]$ $U_i(s) = U_{i'}(s)$.

Ως συνέχεια των παιγνίων Voronoi, στο άρθρο [8] αναλύθηκαν ξεχωριστά οι περιπτώσεις των παιγνίων με 2 παίκτες ($k=2$), 3 παίκτες ($k=3$) και 4 παίκτες ($k=4$).

2.5.5 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 2 παίκτες

Θεώρημα 19 [8]

Στην περίπτωση των 2 παικτών ($k=2$), με δεδομένο μεταβατικό κατά τις κορυφές του γράφο G και αυθαίρετο προφίλ s , τότε το s αποτελεί ισορροπία Nash με

$$U_1(s) = U_2(s) = |V|/2$$

όπου $U_i(s)$ το κέρδος του παίκτη.

Στην περίπτωση αυτή γίνεται σύγκριση, από τους συγγραφείς, με τα παίγνια Hotelling [11] σε πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα με 2 παίκτες. Δηλαδή, υπάρχει μόνο μία ισορροπία Nash, όπου και οι 2 παίκτες βρίσκονται στο κέντρο του ευθύγραμμου τμήματος και συνεπώς έχουν το ίδιο κέρδος. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από την Αρχή της Ελάχιστης Διαφοροποίησης [11].

Όσο αφορά τα παίγνια Hotelling [11], σε μία ισορροπία Nash, οι παίκτες πρέπει να είναι αδιάφοροι. Αφού σε ένα μεταβατικό κατά τις κορυφές του γράφο, οι κόμβοι είναι αδιάφοροι, τότε η αρχή επιβεβαιώνεται ανάλογα και για τα παίγνια Voronoi.

Θεώρημα 20 [8]

Στην περίπτωση των 2 παικτών ($k=2$):

Με δεδομένο μεταβατικό κατά τις κορυφές του γράφο G και κόμβους α και β , τέτοιους ώστε να ισχύει:

$$U_1(\langle \alpha, \beta \rangle) \neq U_2(\langle \alpha, \beta \rangle)$$

τότε το παίγνιο Voronoi $\langle G, [2] \rangle$ δεν έχει ισορροπία Nash.

Βάσει των Θεωρημάτων 19 και 20, και όσο αφορά τα CCC_d , πηγάζει το συμπέρασμα πως:

Θεώρημα 21 [8]

Το παίγνιο Voronoi $\langle CCC_3, [2] \rangle$ δεν έχει ισορροπία Nash.

Οι CCC_d δεν είναι γράφοι γενναϊόδωρα μεταβατικοί κατά τις κορυφές τους.

2.5.6 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 3 παίκτες

Ένα προφίλ $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ είναι **γραμμικό** αν $\text{dist}(\alpha, \beta) + \text{dist}(\beta, \gamma) = \text{dist}(\alpha, \gamma)$. Τότε το β ονομάζεται ο μεσαίος κόμβος και ο παίκτης 2 ο μεσαίος παίκτης. Ο γράφος αυτός ονομάζεται **Τόρος με περιττή διάμετρο**.

Θεώρημα 22 [8]

Στην περίπτωση των 3 παικτών ($k=3$):

Θεωρώντας δυδιάστατο τόρο T_2 με περιττή διάμετρο $\sum_{j \in [2]} p_j$, το παίγνιο Voronoi $\langle T_2, [3] \rangle$ έχει ισορροπία Nash. Κανένας από τους παίκτες 1 και 3 δεν μπορεί να αυξήσει το κέρδος του ανταλλάζοντας θέση.

Όσο αφορά τους υπερκύβους έχουμε το εξής:

Θεώρημα 23 [8]

Για κάθε περιττό ακέραιο d , το παίγνιο Voronoi $\langle H_d, [3] \rangle$ έχει ισορροπία Nash [16].

2.5.7 Παίγνια Μεταβατικών Γράφων με 4 παίκτες

Στη περίπτωση των 4 παικτών, οι συγγραφείς κάνουν διαχωρισμό σε 2 περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά την περίπτωση όπου επιτρέπεται σε παίκτες να μοιράζονται τον ίδιο κόμβο και έχουμε το εξής:

Θεώρημα 24 [8]

Δεδομένου ενός φιλικού γράφου G , το παίγνιο Voronoi $\langle G, [4] \rangle$ έχει ισορροπία Nash.

Συγκεκριμένα, για κάποιο αυθαίρετο ζεύγος αντίποδων α, β , το προφίλ $s = \langle \alpha, \alpha, \beta, \beta \rangle$ αποτελεί ισορροπία Nash.

Στην δεύτερη περίπτωση, δεν επιτρέπεται να συνυπάρχουν παίκτες στον ίδιο κόμβο και έχουμε το εξής:

Θεώρημα 25 [8]

Δεδομένου διμερούς φιλικού γράφου G με περιττή διάμετρο, το παίγνιο Voronoi $\langle G, [4] \rangle$ έχει ισορροπία Nash.

Συγκεκριμένα για κάποιο αυθαίρετο ζεύγος δύο διαφορετικών ζευγών α, β και γ, δ αντίστοιχα, το προφίλ $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ αποτελεί ισορροπία Nash.

2.5.8 Θεώρημα Δύο Φρουρών

Στη υποενότητα αυτή μελετείται το **θεώρημα των δύο φρουρών** σε φιλικό γράφο στην περίπτωση 3 παικτών [8]. Το θεώρημα αυτό ορίζει ότι όποτε δύο από τους παίκτες είναι τοποθετημένοι σε ένα αντιποδικό ζεύγος κόμβων σε ένα φιλικό γράφο G με περιττή διάμετρο, τότε το κέρδος του τρίτου παίκτη ισούται με $\frac{|V(G)|}{4} + \frac{|\Omega|}{12}$ όπου το Ω ορίζει την τομή των 3 κελλιών Voronoi.

Στην περίπτωση του διμερούς φιλικού γράφου με περιττή διάμετρο, θεώρημα των δύο φρουρών σε φιλικό γράφο ισχυρίζεται πως ανεξάρτητα από τη θέση του τρίτου παίκτη, λαμβάνει σταθερό κέρδος που ισούται με $\frac{|V(G)|}{4}$.

Σε συνδιασμό με τους κατάλληλους αυτομορφισμούς, το θεώρημα των δύο φρουρών συνεπάγει την ύπαρξη ισορροπίας Nash [16] στις εξής περιπτώσεις:

- 1 Δυδιάστατο τόρο T_2 με περιττή διάμετρο και $k=3$.
- 2 Αυθαίρετο τόρο T_d με περιττή διάμετρο και $k=4$.
- 3 Υπερκύβο H_d με περιττό d και $k=3$.
- 4 Υπερκύβο H_d και $k=4$.

Κεφάλαιο 3

Παίγνια Απομόνωσης

3.1 Παίγνια Απομόνωσης Πλησιέστερου Γείτονα και Συνολικής Απόστασης	50
3.2 Μονοτονικά Αυξανόμενα Παίγνια Απομόνωσης	51
3.3 Μονοτονικά Μειωμένα Παίγνια Απομόνωσης	51
3.4 Υπερκύβος n -Διαστάσεων	52
3.5 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Επιλογής	52
3.5.1 Παίγνια Απομόνωσης Μονής Επιλογής	53
3.6 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Κατάληξης	54

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα νέο γεωμετρικό παιχνίδι πολλαπλών παικτών, το λεγόμενο παίγνιο απομόνωσης. Τα **παίγνια απομόνωσης** [4], είναι εμπνευσμένα από τα παίγνια Voronoi [5], την ανταγωνιστική τοποθέτηση εξυπηρετητών [6,7,9], το σύμπλεγμα δεδομένων [12] και τη γεωμετρική δειγματοληψία. Σε αντίθεση με τα παίγνια Voronoi όπου ο στόχος κάθε παίκτη είναι να αυξήσει την Voronoi περιοχή του, στα παίγνια απομόνωσης ο στόχος κάθε παίκτη είναι να τοποθετηθεί όσο πιο μακριά από τους υπόλοιπους παίκτες γίνεται σε ένα οριοθετημένο διάστημα. Στα παιχνίδια αυτά, το κέρδος κάθε παίκτη καθορίζεται συναρτήσει των αποστάσεων από τους υπόλοιπους παίκτες.

Στο γενικευμένο παίγνιο απομόνωσης, σε περιπτώσεις ανταγωνισμού αγοράς, το κέρδος μίας επιχείρησης εξαρτάται από την ανομοιομορφία των προϊόντων της συγκριτικά με αυτά των ανταγωνιστών της. Το κέρδος αυτό υπολογίζεται βάσει των χαρακτηριστικών των προϊόντων. Εδώ γίνεται και ένας παραλληλισμός με διάφορους υποψήφιους σε εκλογές, όπου κάθε υποψήφιος προσπαθεί να διαφοροποιηθεί από τους συνυποψήφιους του με σκοπό να αυξήσει τις πιθανότητες εκλογής του.

Σε ένα παίγνιο απομόνωσης, υπάρχουν k παίκτες οι οποίοι θα τοποθετηθούν σε ένα διάστημα (Ω, Δ) , όπου το $\Delta(x,y)$ καθορίζει την απόσταση ζευγών μεταξύ των σημείων στο Ω .

Το (Ω, Δ) είναι **συμμετρικό** όταν $\Delta(x,y) = \Delta(y,x)$ για κάθε $x,y \in \Omega$.

Η σύνθεση ενός παίγνιου απομόνωσης είναι ένα διάνυσμα $(p_1, p_2, \dots, p_k)$, όπου $p_i \in \Omega$ καθορίζει την θέση του παίκτη i .

Ο i -οστός παίκτης έχει μία συνάρτηση $(k-1)$ -θέσης $f_i(\dots, \Delta(p_i, p_{i-1}), \Delta(p_i, p_{i+1}), \dots)$ από τις $k-1$ αποστάσεις προς όλους τους υπόλοιπους παίκτες σε μία πραγματική τιμή,

μετρώντας το πόσο μακριά βρίσκεται από τη θέση p_i προς τις θέσεις των υπολοίπων παικτών. Ο στόχος του παίκτη i είναι να μεγιστοποιήσει την απόσταση αυτή $f_i(\dots, \Delta(p_i, p_{i-1}), \Delta(p_i, p_{i+1}), \dots)$, εφόσον οι θέσεις των άλλων παικτών $(\dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots)$ δοθούν. Για ευκολία χρησιμοποιείται το $u_i(c)$ για να υποδηλώσει το κέρδος του παίκτη i στην σύνθεση c .

Η απλούστερη συνάρτηση που δηλώνει το πόσο μακρινή είναι η απόσταση $f_i()$ θα μπορούσε να ήταν αυτή που υπολογίζει την απόσταση του p_i προς τον κοντινότερο παίκτη (παίγνια πλησιέστερου γείτονα). Επίσης θα μπορούσε να ήταν η συνολική απόσταση του p_i προς τους υπόλοιπους παίκτες (παίγνια συνολικής απόστασης).

Η **καλύτερη αντίδραση** του παίκτη i σε μία σύνθεση $c = (p_1, \dots, p_k)$ είναι μία νέα θέση $p_i' \neq p_i$, τέτοια ώστε το κέρδος του παίκτη i στην σύνθεση c' , αντικαθιστώντας το p_i με p_i' στην c , είναι μεγαλύτερο από το κέρδος στην c . Σε τέτοια περίπτωση, η c' είναι το αποτέλεσμα μίας μετακίνησης καλύτερης αντίδρασης του παίκτη i στη σύνθεση c .

Η **βέλτιστη αντίδραση** του παίκτη i σε μία σύνθεση $c = (p_1, \dots, p_k)$ είναι μία νέα θέση $p_i' \neq p_i$ που μεγιστοποιεί το κέρδος του παίκτη i , τη στιγμή που ο παίκτης j παραμένει στην θέση p_j για κάθε $j \neq i$. Σε τέτοια περίπτωση, το c' είναι το αποτέλεσμα μίας μετακίνησης βέλτιστης αντίδρασης του παίκτη i στη σύνθεση c .

Μία γνήσια ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο απομόνωσης είναι μία σύνθεση όπου κανένας παίκτης δεν έχει καλύτερη αντίδραση στη σύνθεση.

Ένα παίγνιο απομόνωσης αποτελεί **ισχύ καλύτερης αντίδρασης** ή **ισχύ βέλτιστης αντίδρασης** αν υπάρχει μία συνάρτηση F από το σύνολο όλων των συνθέσεων σε ένα πλήρως διατεταγμένο σύνολο ώστε $F(c) < F(c')$ για οποιεσδήποτε 2 συνθέσεις c και c' όπου c' είναι το αποτέλεσμα μίας μετακίνησης καλύτερης ή βέλτιστης αντίδρασης κάποιου παίκτη στη σύνθεση c . Η F ονομάζεται **συνάρτηση ισχύος**.

Σημειώνεται επίσης ότι ένα παίγνιο με ισχύ καλύτερης αντίδρασης (παίγνιο ισχύος) είναι και παίγνιο με ισχύ βέλτιστης αντίδρασης. Το αντίθετο, όμως, μπορεί να μην ισχύει. Αν το Ω είναι πεπερασμένο, οποιοδήποτε από τα πιο πάνω παίγνια έχει τουλάχιστο μία ισορροπία Nash.

Όσο αφορά τις εφαρμογές των παιγνίων απομόνωσης, παρέχεται το εξής πρόβλημα σε περιπτώσεις μη συνεργάσιμων ασύρματων δικτύων [4]:

Έχουμε ένα σύνολο χρηστών που πρέπει να επιλέξουν το σημείο που θα τοποθετήσουν την κεραία τους ώστε να μεταδίδει και να λαμβάνει σήμα. Όταν εκπέμπουν περισσότερες από μία κεραίες ταυτόχρονα, μπορεί να προκληθεί παρεμβολή μεταξύ των σημάτων. Συγκεκριμένα, η κεραία i λαμβάνει ταυτόχρονα h διαφορετικά σήματα $r_1, \dots, r_h$ από τα οποία μόνο το r_1 είναι προορισμένο για την κεραία i . Σύμφωνα με τη σχεδίαση δικτύων, το σήμα r_1 λαμβάνεται κανονικά από την κεραία i αν και μόνο αν ο λόγος μεταξύ της δύναμης στην οποία το σήμα r_1 λαμβάνεται από την κεραία i και του αθροίσματος των δυνάμεων στο οποίο τα ανεπιθύμητα $h-1$ σήματα λαμβάνονται από την κεραία i , είναι μεγαλύτερος από μία συγκεκριμένη τιμή. Αν οι χρήστες είναι εγωιστές και ενδιαφέρονται στο να ελαχιστοποιήσουν τις παρεμβολές της κεραίας τους, θα πρέπει να τοποθετήσουν την κεραία τους όσο πιο μακριά γίνεται από τους υπόλοιπους χρήστες.

Έχουμε τα εξής διανύσματα βάρους [4]:

- **Διάνυσμα ℓ -επιλογής:**
($0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$) όπου όλα ισούνται με μηδέν, εκτός από το ℓ -οστό που ισούται με ένα. Συνεπώς το κέρδος ενός παίκτη δίνεται από την απόσταση από τον ℓ -οστό κοντινότερο παίκτη.
- **Διάνυσμα Αθροίσματος:**
($1, \dots, 1$) όπου το κέρδος ενός παίκτη δίνεται από το άθροισμα των αποστάσεων από όλους τους υπόλοιπους παίκτες.
- **Διάνυσμα ℓ -κατάληξης:**
($0, \dots, 0, 1, \dots, 1$) όπου τα τελευταία ℓ στοιχεία ισούνται με ένα και τα υπόλοιπα με μηδέν. Άρα το κέρδος ενός παίκτη δίνεται από το άθροισμα των αποστάσεων από τους ℓ μακρινότερους παίκτες.

3.1 Παίγνια Απομόνωσης Πλησιέστερου Γείτονα και Συνολικής Απόστασης

Στην υποενότητα αυτή, παρουσιάζεται μελέτη που πραγματοποιήθηκε στα παίγνια απομόνωσης με διανύσματα βάρους $(1, 0, \dots, 0)$ (παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα) και $(1, 1, \dots, 1)$ (παίγνια απομόνωσης συνολικής απόστασης) [17].

Θεώρημα 26 [17]

Όταν το Ω είναι συμμετρικό, τα παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα και τα παίγνια απομόνωσης συνολικής απόστασης αποτελούν **παίγνια ισχύος**. Όταν όμως το Ω είναι ασυμμετρές και πεπερασμένο, το να αποφασιστεί αν τα παίγνια αυτά έχουν ισορροπία Nash είναι NP-πλήρες.

Το τελευταίο αποδεικνύεται με αναγωγή σε ένα γνωστό NP-δύσκολο πρόβλημα, το πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟΥ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗΣ.

Θεώρημα 27 [17]

Τα συμμετρικά παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα και συνολικής απόστασης είναι **παίγνια ισχύος**. Αντίστοιχα, τα μη συμμετρικά παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα και συνολικής απόστασης μπορεί να μην έχουν ισορροπία Nash.

Μελέτη έχει πραγματοποιηθεί και στα παίγνια απομόνωσης συνολικής απόστασης [4]. Δίνεται η **κοινωνική συνάρτηση SUM** η οποία ορίζεται ως το άθροισμα των κερδών όλων των παικτών. Σύμφωνα με το SUM, για κάθε $l \in [k-1]$, το τίμημα αναρχίας και το τίμημα σταθερότητας των παιγνίων απομόνωσης l -επιλογής είναι απεριόριστο.

Όπως έχει αποδειχθεί [17], τα παίγνια απομόνωσης συνολικής απόστασης είναι **παίγνια ισχύος**, δηλαδή υπάρχει ισορροπία Nash και μάλιστα από οποιοδήποτε αρχικό προφίλ στρατηγικής. Η μελέτη συγκέντρωσε κάποια αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια. Το τίμημα σταθερότητας των παιγνίων απομόνωσης συνολικής απόστασης κάτω από την κοινωνική συνάρτηση SUM είναι 1. Επίσης το τίμημα αναρχίας των παιγνίων απομόνωσης συνολικής απόστασης κάτω από την κοινωνική συνάρτηση SUM είναι 2.

Δίνεται επίσης η **κοινωνική συνάρτηση MIN**, η οποία ορίζεται ως το ελάχιστο κέρδος ανά παίκτη και τα αποτελέσματα σχετικά με αυτό παρουσιάζονται στη συνέχεια. Το τίμημα αναρχίας των παιγνίων απομόνωσης συνολικής απόστασης κάτω από την κοινωνική συνάρτηση MIN είναι μεταξύ 2 και $2(k+1)/(k-1)$.

Το τίμημα σταθερότητας των παιγνίων απομόνωσης συνολικής απόστασης κάτω από την κοινωνική συνάρτηση MIN είναι μεταξύ 1 και $(k+1)/(k-1)$.

3.2 Μονοτονικά Αυξανόμενα Παίγνια Απομόνωσης

Κατηγορία των παιγνίων απομόνωσης, αποτελούν τα **Μονοτονικά Αυξανόμενα Παίγνια Απομόνωσης** [17]. Ένα ζεύγος σημείων $u, v \in \Omega$ είναι ένα ζεύγος πολικών σημείων αν για κάθε σημείο $w \in \Omega$, το $\Delta(u, w) + \Delta(w, v) \leq \Delta(u, v)$ ισχύει. Περιοχές με πολικά σημεία περιλαμβάνουν μονοδιάστατες κυκλικές περιοχές, δυδιάστατες σφαιρικές περιοχές, πλέγμα n διαστάσεων με κανόνα L_1 ως τη συνάρτηση απόστασης κτλ.

Θεώρημα 28 [17]

Αν το Ω έχει ένα ζεύγος πολικών σημείων, τότε οποιοδήποτε μονοτονικά αυξανόμενο παίγνιο απομόνωσης στο Ω έχει ισορροπία Nash.

3.3 Μονοτονικά Μειωμένα Παίγνια Απομόνωσης

Μία άλλη κατηγορία των παιγνιδιών απομόνωσης, αποτελούν τα **Μονοτονικά Μειωμένα Παίγνια Απομόνωσης** [17]. Να σημειώσουμε ότι σχετικά με τα συγκεκριμένα παίγνια δεν υπάρχουν διαθέσιμα αποδεδειγμένα αποτελέσματα λόγω της πολυπλοκότητας τους στο να αναλυθούν (τουλάχιστο μέχρι το σημείο μελέτης και συγγραφής του δεδομένου άρθρου για τους συγγραφείς). Ακολουθούν κάποια γενικά αποτελέσματα της έρευνας.

Θεώρημα 29 [17]

Σε συνεχή μονοδιάστατο κυκλικό χώρο Ω , το παίγνιο απομόνωσης με διάνυσμα βάρους $w = (w_1, w_2, \dots, w_{k-1})$ έχει πάντοτε ισορροπία Nash [16] εάν ισχύει το εξής:

$$\sum_{t=1}^{k-1} (-1)^t w_t \leq 0.$$

Τα μονοτονικά μειωμένα παίγνια απομόνωσης, σε συνεχή μονοδιάστατο κυκλικό χώρο, ικανοποιούν αυτόματα την πιο πάνω συνθήκη και συνεπώς έχουν ισορροπία Nash.

Επιπρόσθετα, θεωρούμε 6 σημεία $\Omega = \{A, B, C, D, E, F\}$ σε μονοδιάστατο κυκλικό χώρο με αποστάσεις μεταξύ ζευγών σημείων $\Delta(A, B)=13$, $\Delta(B, C)=5$, $\Delta(C, D)=10$, $\Delta(D, E)=10$, $\Delta(E, F)=11$ και $\Delta(F, A)=8$. Το διάνυσμα βάρους είναι $w=(1, 1, 0, 0)$. Το παίγνι δεν αποτελεί ισχύ βέλτιστης αντίδρασης και συνεπώς ούτε ισχύ καλύτερης αντίδρασης. Με επέκταση από το μονοδιάστατο κυκλικό χώρο σε ένα γενικευμένο συμμετρικό χώρο, μπορεί να μην υπάρχει ισορροπία Nash για παίγνια απομόνωσης με διάνυσμα βάρους $w=(1, 1, 0, \dots, 0)$.

Σε ένα πεπερασμένο συμμετρικό χώρο (Ω, Δ) , το να αποφασιστεί η ύπαρξη ισορροπίας για παίγνιο απομόνωσης με διάνυσμα βάρους $w=(1,1,0, \dots, 0)$ είναι NP-πλήρες. Η απόδειξη γίνεται μέσω αναγωγής σε γνωστό NP-δύσκολο πρόβλημα, του προβλήματος ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ.

3.4 Υπερκύβος n -Διαστάσεων

Μία άλλη κατηγορία αποτελεί ο **υπερκύβος $\{0,1\}^n$ n διαστάσεων** [17] με την απόσταση Hamming (επεξήγηση της απόστασης Hamming παρατίθεται στο σχήμα 2.5.2.1).

Σε ένα υπερκύβο $2n$ διαστάσεων $\{0,1\}^{2n}$, το να αποφασιστεί αν ένας παίκτης μπορεί να μετακινηθεί σε ένα σημείο ώστε το κέρδος του να είναι τουλάχιστο $n-1$ στο παίγνιο απομόνωσης κοντινότερου γείτονα k παικτών, είναι NP-πλήρες.

Είναι NP-δύσκολο το να υπολογιστεί η βέλτιστη αντίδραση για ένα παίγνιο απομόνωσης στο χώρο $\{0,1\}^{2n}$ με διάνυσμα βάρους $w = (\underbrace{*, \dots, *}_c, 1, 0, \dots, 0)$, όπου c

είναι μία σταθερή τιμή και το $*$ είναι είτε 0 είτε 1.

Αντίθετα, η βέλτιστη αντίδραση για ένα παίγνιο απομόνωσης k -παικτών στο χώρο $\{0,1\}^n$ με διάνυσμα βάρους $w = (0, \dots, 0, \underbrace{1, *, \dots, *}_c)$, όπου c είναι μία σταθερή τιμή, k

είναι οριοθετημένο σε $\text{poly}(n)$ και το $*$ είναι είτε 0 είτε 1, μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

3.5 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Επιλογής

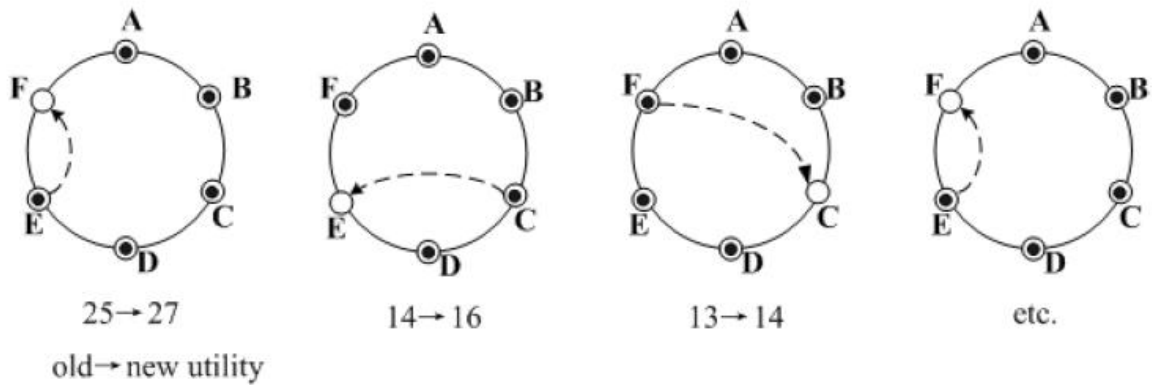
Επιπλέον κατηγορία παιγνίων απομόνωσης αποτελούν τα **Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Επιλογής**. Όπως έχει αποδειχθεί [17] για τα παιγνίδια αυτά η ύπαρξη της ισορροπίας Nash είναι εγγυημένη για οποιοδήποτε $\ell \in [k-1]$. Στα παίγνια αυτά, το κέρδος του παίκτη καθορίζεται από την απόσταση από τον ℓ -οστό κοντινότερο παίκτη.

Στο σημείο αυτό έχουμε την **κοινωνική συνάρτηση MIN**, η οποία ορίζεται ως το ελάχιστο κέρδος ανά παίκτη. Για κάθε $\ell \in [k-1]$, το τμήμα αναρχίας [13] που προαναφέρθηκε, για τα παίγνια απομόνωσης ℓ -επιλογής κάτω από την κοινωνική συνάρτηση MIN είναι 2. Έχει αποδειχθεί πως για κάθε περίπτωση παιγνίου απομόνωσης ℓ -επιλογής το τμήμα αναρχίας είναι το πολύ 2.

Όπως επίσης αποδείχθηκε [17], τα παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα είναι παίγνια ισχύος, οποιαδήποτε ακολουθία της καλύτερης αντίδρασης πρέπει να οδηγεί σε ισορροπία Nash. Έτσι για κάθε $1 < \ell < k$, το τμήμα σταθερότητας [3], και για κάθε παίγνιο απομόνωσης ℓ -επιλογής κάτω από την κοινωνική συνάρτηση MIN, είναι 1.

3.5.1 Παίγνια Απομόνωσης Μονής Επιλογής

Η μελέτη στα παίγνια απομόνωσης συνεχίζεται και σε άλλες κατηγορίες με διαφορετικά διανύσματα βάρους, σε συμμετρική περιοχή [17]. Μία κατηγορία των παιγνιδιών απομόνωσης αποτελούν τα **Παίγνια Απομόνωσης Μονής Επιλογής**, τα οποία ανήκουν στη γενικευμένη περίπτωση των παιγνίων απομόνωσης ℓ -επιλογής αλλά με $\ell = 1$. Στα παιγνίδια αυτά υπάρχει πάντοτε ισορροπία Nash αλλά δεν είναι παίγνια ισχύος. Τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται πιο κάτω στο Σχήμα 3.1:



Σχήμα 3.1 – παράδειγμα παίγνιου απομόνωσης 5 παικτών σε μονοδιάστατο κυκλικό χώρο 6 σημείων.

Θεωρούμε 6 σημεία $\Omega = \{A, B, C, D, E, F\}$ σε μονοδιάστατο κυκλικό χώρο με αποστάσεις μεταξύ ζευγών σημείων $\Delta(A, B) = 15$, $\Delta(B, C) = 11$, $\Delta(C, D) = 14$, $\Delta(D, E) = 16$, $\Delta(E, F) = 13$ και $\Delta(F, A) = 12$. Οι 5 παίκτες καταλαμβάνουν τα σημεία A, B, C, D και E αντίστοιχα στην αρχική σύνθεση. Το διάνυσμα βάρους είναι $(0, 1, 0, 0)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2.1, το δυναμικό καλύτερης αντίδρασης μπορεί να επαναλαμβάνεται επ' άπειρον, και συνεπώς το συγκεκριμένο παίγνιο δεν είναι παίγνιο ισχύος.

Έχει επίσης αποδείχθει πως:

Θεώρημα 30 [17]

Για πεπερασμένο Ω , οποιοδήποτε παίγνιο μονής επιλογής στο Ω και αρχική σύνθεση c , υπάρχει μία ακολουθία καλύτερης αντίδρασης στο παιγνίδι που οδηγεί σε ισορροπία Nash.

3.6 Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Κατάληξης

Τελευταία κατηγορία που παρουσιάζεται στα παίγνια απομόνωσης είναι τα **Παίγνια Απομόνωσης ℓ -Κατάληξης** [4]. Τα παίγνια αυτά αποτελούν γενίκευση των παιγνίων απομόνωσης συνολικής απόστασης που αναφέρονται στην ενότητα 3.1.

Για κάθε $2 \leq \ell \leq k-2$ χρησιμοποιούν το διάνυσμα ℓ -κατάληξης $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ όπου τα τελευταία ℓ στοιχεία ισούνται με 1 και τα υπόλοιπα με 0. Άρα το κέρδος ενός παίκτη δίνεται από το άθροισμα των αποστάσεων από τους ℓ μακρινότερους παίκτες.

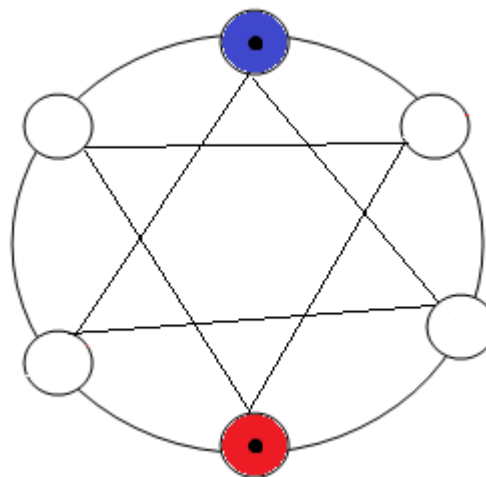
Στην περίπτωση αυτή, στα παίγνια απομόνωσης ℓ -κατάληξης, η ισορροπία Nash [16] δεν είναι εγγυημένη όπως επίσης και ούτε αποτελούν παίγνια ισχύος.

Κεφάλαιο 4

Παίγνια Voronoi Σε Κυκλικούς Γράφους Με Χορδή

4.1 Παραδείγματα Κυκλικών Γράφων Με Χορδή	58
4.2 Συμπεράσματα	69

Εκτός απο τις τοπολογίες που προαναφέρθηκαν, έχω μελετήσει και μία άλλη κατηγορία γράφων, τους κυκλικούς γράφους με χορδή και περιπτώσεις ισορροπίας Nash [16] και μη ισορροπίας σ' αυτούς (χωρίς απόδειξη). Οι γράφοι αυτοί μοιάζουν με τους κυκλικούς γράφους, με τη διαφορά ότι τώρα έχουμε και χορδές. Κάθε χορδή ενώνει 2 κορυφές του γράφου. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από ένα συνδεδεμένο ακατεύθυντο κυκλικό γράφο G , το πλήθος των κόμβων του γράφου n , το πλήθος των παικτών k , όπου $k \in \mathbb{N}$ και $k \leq n$ και την απόσταση χορδής d . Όπως και στους ακατεύθυντους κυκλικούς γράφους χωρίς χορδή [5, 15], που προαναφέρθηκαν, ισορροπία Nash έχουμε στην περίπτωση όπου κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει μονομερώς το κέρδος του αλλάζοντας στρατηγική. Παράδειγμα τέτοιου γράφου φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Σχήμα 4.1 – παράδειγμα κυκλικού γράφου με χορδή

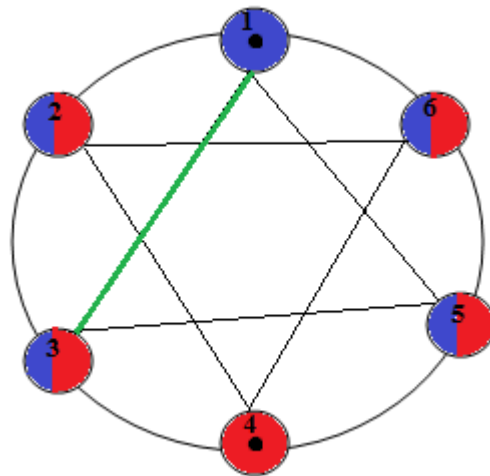
Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε ένα παράδειγμα γράφου με:

$$n = 6$$

$$k = 2$$

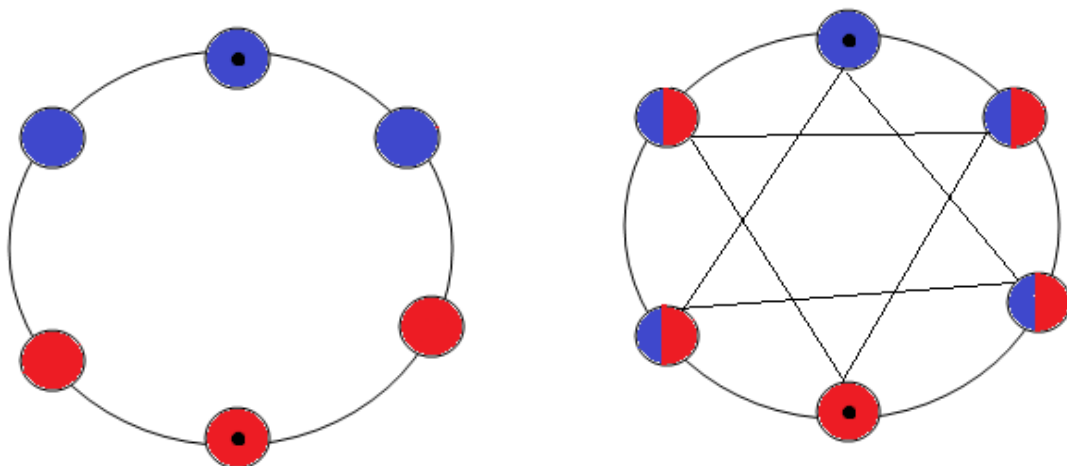
$d = 2$ (η χορδή προσπερνά 1 κόμβο κάθε φορά, πάει στον 2^ο κόμβο από εκεί που ξεκινά)

Η έννοια της χορδής χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του κέρδους κάθε παίκτη. Μέσω της χορδής αυξάνονται οι κόμβοι στους οποίους βρίσκονται πιο κοντά ένας παίκτης. Βάσει του παραδείγματος στο Σχήμα 4.2, ο παίκτης στον κόμβο 1 έχει απόσταση μήκους 2 από τον κόμβο 3 χρησιμοποιώντας την περιφέρεια του κύκλου. Χρησιμοποιώντας τη χορδή, με πράσινο χρώμα, η απόσταση του από τον κόμβο 3 είναι μόλις 1. Επίσης, ο μπλε παίκτης έχει ελάχιστη απόσταση 2 από τον κόκκινο παίκτη, χρησιμοποιώντας την πράσινη χορδή και την περιφέρεια του κύκλου μεταξύ κόμβων 3 και 4. Δηλαδή μπορούμε να έχουμε συνδιασμό χορδής και περιφέρειας κύκλου στον υπολογισμό του κέρδους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάθε παίκτης βρίσκεται σε απόσταση 1 από όλους τους κόμβους (χωρίς παίκτη) και συνεπώς μοιράζονται όλους τους κόμβους από κοινού. Το κέρδος κάθε παίκτη είναι 3.



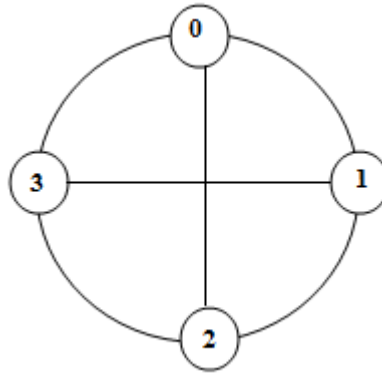
Σχήμα 4.2 – συνέχεια παραδείγματος κυκλικού γράφου με χορδή με το κέρδος κάθε παίκτη

Στο σημείο αυτό βλέπουμε την σύγκριση του ίδιου παραδείγματος κυκλικού γράφου με χορδή και χωρίς χορδή. Το κέρδος κάθε παίκτη ισούται με 3 και στις 2 περιπτώσεις αλλά βλέπουμε πως διαφέρουν οι κόμβοι (ή το μερίδιο κόμβων) που αντιστοιχούν σε κάθε παίκτη. Η σύγκριση φαίνεται πιο κάτω, στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3 – Σύγκριση κέρδους παικτών στον ίδιο κυκλικό γράφο 6 κόμβων και 2 παικτών α) χωρίς χορδή και β) με χορδή.

Ακολουθούν παραδείγματα κυκλικών γράφων με χορδή με υπολογισμό κέρδους κάθε παίκτη. Επίσης, σε κάθε περίπτωση εξετάζεται αν υπάρχει ισορροπία ή όχι. Στα παραδείγματα που ακολουθούν, η αρίθμηση κόμβων λειτουργεί με τη φορά του ρολογιού, και ο κάθε κόμβος έχει θέση i , όπου $i=0,1,2,3,..$ κτλ όπως φαίνεται πιο κάτω:



Σχήμα 4.4 – αρίθμηση κόμβων

4.1 Παραδείγματα Κυκλικών Γράφων Με Χορδή

Περίπτωση 1:

$$n = 9$$

$$k = 3$$

$$d = 2$$

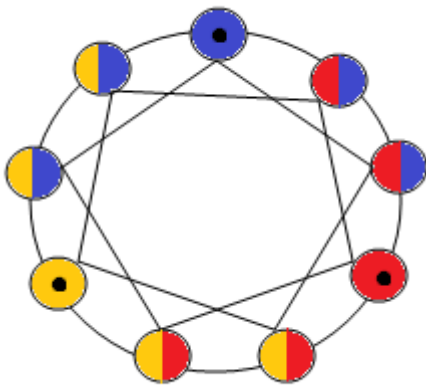
$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

$$\text{Θέση παίκτη 1: } 0 \cdot 9/3 = 0$$

$$\text{Θέση παίκτη 2: } 1 \cdot 9/3 = 3$$

$$\text{Θέση παίκτη 3: } 2 \cdot 9/3 = 6$$



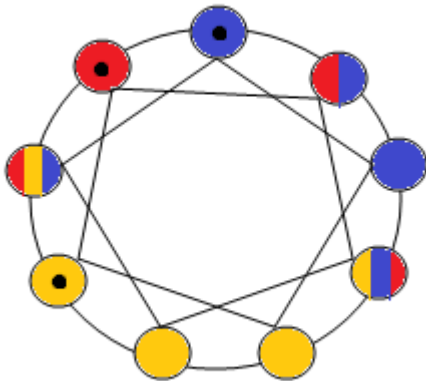
Κέρδη Παικτών:

$$\text{Μπλέ Παίκτης} = 3$$

$$\text{Κόκκινος Παίκτης} = 3$$

$$\text{Κίτρινος Παίκτης} = 3$$

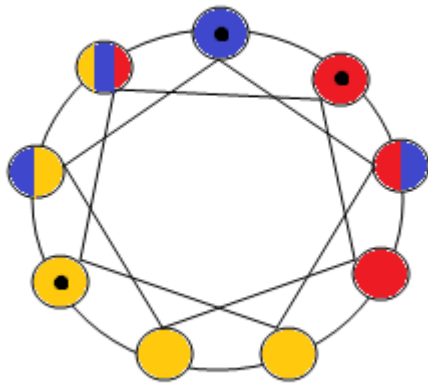
Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη από τη θέση $i=3$ στη θέση $i=8$, ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον κίτρινο παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



$$\text{Κέρδος Κόκκινου Παίκτη} = 13/6 \leq 3$$

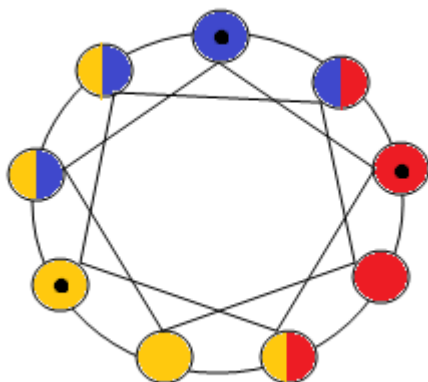
Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=7$, γιατί δίνει το ίδιο κέρδος με την περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=8$ που προαναφέρθηκε.

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=1$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $17/6 \leq 3$

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=2$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $3 \leq 3$

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης του κόκκινου παίκτη στις θέσεις $i=4$ και $i=5$, γιατί το κέρδος που λαμβάνουμε είναι το ίδιο με τις περιπτώσεις $i=2$ και $i=1$ αντίστοιχα που προαναφέρθηκαν. Για τον ίδιο λόγο, δεν χρειάζεται να γίνουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και για τους υπόλοιπους παίκτες καθ' ότι θα λάβουμε τα ίδια αποτελέσματα σε κάθε αντίστοιχη μετακίνηση.

Αφού η μετακίνηση του παίκτη, δηλαδή η αλλαγή στρατηγικής του, δεν αποφέρει καμία αύξηση στο αρχικό κέρδος του τότε έχουμε ισορροπία.

Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση $n=9$, $k=3$ και $d=7$. Η απεικόνιση του δίνει ακριβώς τον ίδιο γράφο με τις ίδιες χορδές.

Περίπτωση 2:

$$n = 12$$

$$k = 4$$

$$d = 2$$

$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

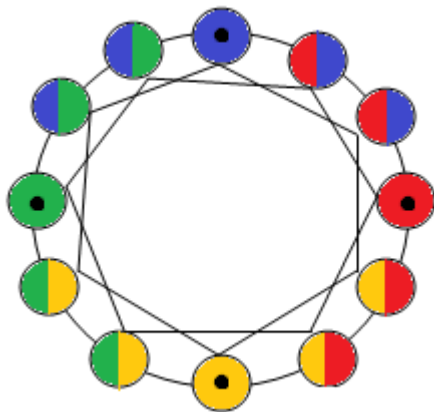
Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

Θέση παίκτη 1: $0 \cdot 12/4 = 0$

Θέση παίκτη 2: $1 \cdot 12/4 = 3$

Θέση παίκτη 3: $2 \cdot 12/4 = 6$

Θέση παίκτη 4: $3 \cdot 12/4 = 9$



Κέρδη Παικτών:

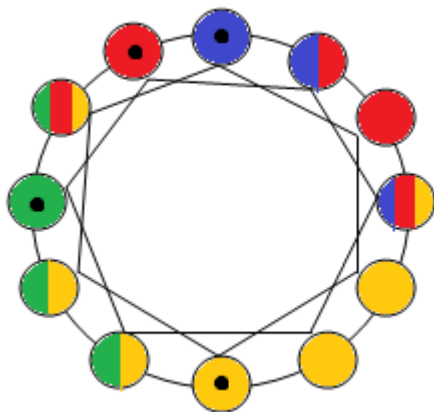
Μπλε Παίκτης = 3

Κόκκινος Παίκτης = 3

Κίτρινος Παίκτης = 3

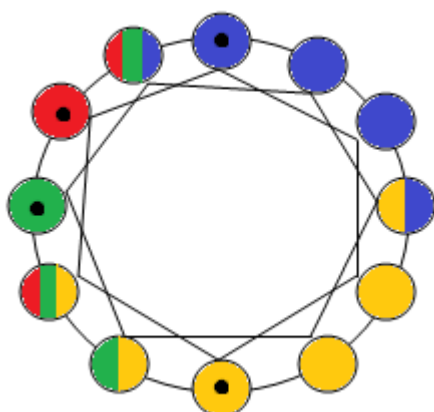
Πράσινος Παίκτης = 3

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη από τη θέση $i=3$ στη θέση $i=11$, ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον πράσινο παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $13/6 \leq 3$

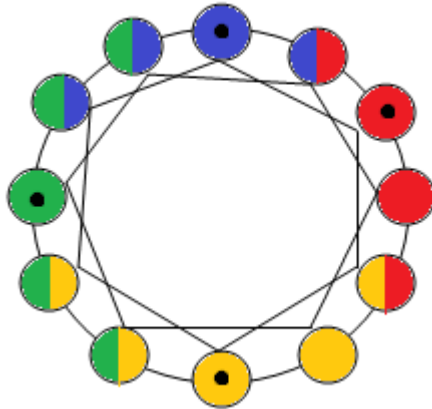
Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=10$, ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον πράσινο παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $5/3 \leq 3$

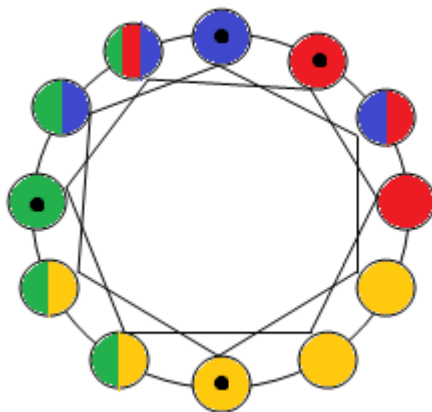
Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης ανάμεσα στον κίτρινο παίκτη και τον πράσινο παίκτη, γιατί θα λάβουμε το ίδιο κέρδος με τη μετακίνηση ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον πράσινο παίκτη.

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=2$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $3 \leq 3$

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=1$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $17/6 \leq 3$

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης του κόκκινου παίκτη στις θέσεις $i=4$ και $i=5$, γιατί το κέρδος που λαμβάνουμε είναι το ίδιο με τις περιπτώσεις $i=2$ και $i=1$ αντίστοιχα που προαναφέρθηκαν. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, δεν χρειάζεται να γίνουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και για τους υπόλοιπους παίκτες καθ' ότι θα λάβουμε τα ίδια αποτελέσματα σε κάθε αντίστοιχη μετακίνηση.

Αφού η μετακίνηση του παίκτη, δηλαδή η αλλαγή στρατηγικής του, δεν αποφέρει καμία αύξηση στο αρχικό κέρδος του τότε έχουμε ισορροπία.

Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση $n=12$, $k=4$ και $d=10$. Η απεικόνιση του δίνει ακριβώς τον ίδιο γράφο με τις ίδιες χορδές.

Περίπτωση 3:

$$n = 9$$

$$k = 3$$

$$d = 3$$

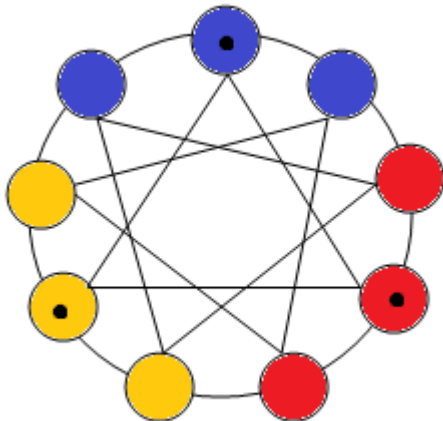
$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

$$\text{Θέση παίκτη 1: } 0 \cdot 9/3 = 0$$

$$\text{Θέση παίκτη 2: } 1 \cdot 9/3 = 3$$

$$\text{Θέση παίκτη 3: } 2 \cdot 9/3 = 6$$



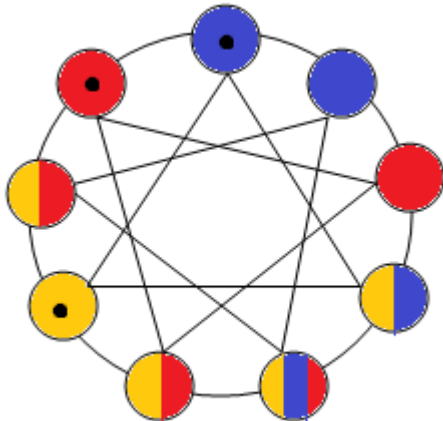
Κέρδη Παικτών:

$$\text{Μπλε Παίκτης} = 3$$

$$\text{Κόκκινος Παίκτης} = 3$$

$$\text{Κίτρινος Παίκτης} = 3$$

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη από τη θέση $i=3$ στη θέση $i=8$, ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον κίτρινο παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



$$\text{Κέρδος Κόκκινου Παίκτη} = 10/3 > 3$$

Παρατηρούμε ότι με αλλαγή στρατηγικής, ο κόκκινος παίκτης αυξάνει το κέρδος του. Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε τις άλλες περιπτώσεις αλλαγής στρατηγικής και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν έχουμε ισορροπία.

Περίπτωση 4:

$$n = 9$$

$$k = 3$$

$$d = 4$$

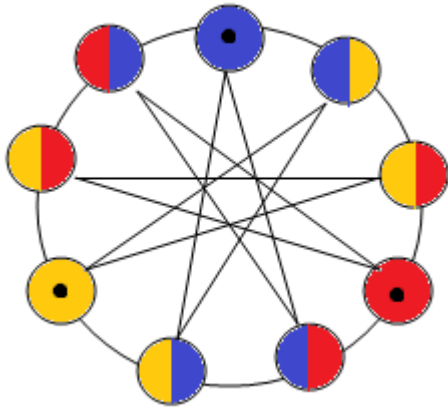
$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

Θέση παίκτη 1: $0 \cdot 9/3 = 0$

Θέση παίκτη 2: $1 \cdot 9/3 = 3$

Θέση παίκτη 3: $2 \cdot 9/3 = 6$



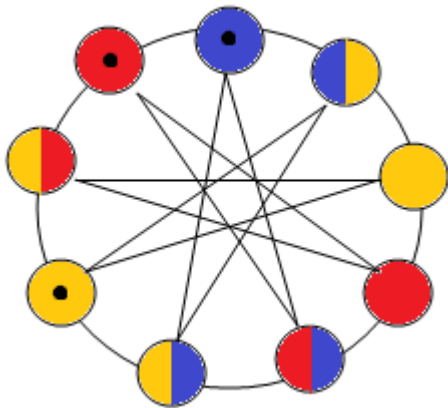
Κέρδη Παικτών:

Μπλέ Παίκτης = 3

Κόκκινος Παίκτης = 3

Κίτρινος Παίκτης = 3

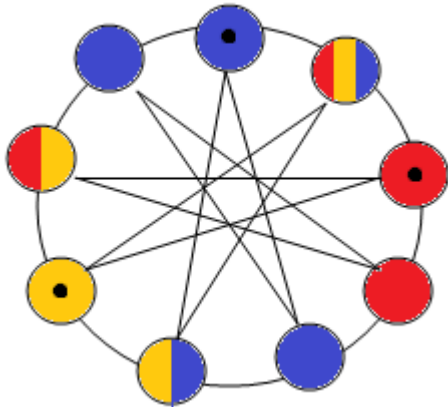
Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη από τη θέση $i=3$ στη θέση $i=8$, ανάμεσα στον μπλε παίκτη και τον κίτρινο παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $3 \leq 3$

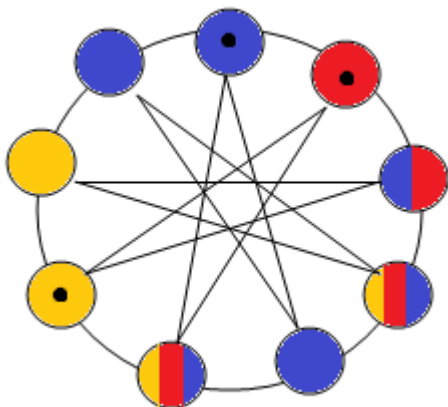
Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=7$, γιατί δίνει το ίδιο κέρδος με την περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=8$ που προαναφέρθηκε.

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=2$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $17/6 \leq 3$

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη στη θέση $i=1$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $13/6 \leq 3$

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης του κόκκινου παίκτη στις θέσεις $i=4$ και $i=5$, γιατί το κέρδος που λαμβάνουμε είναι το ίδιο με τις περιπτώσεις $i=2$ και $i=1$ αντίστοιχα που προαναφέρθηκαν. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, δεν χρειάζεται να γίνουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και για τους υπόλοιπους παίκτες καθ' ότι θα λάβουμε τα ίδια αποτελέσματα σε κάθε αντίστοιχη μετακίνηση.

Αφού η μετακίνηση του παίκτη, δηλαδή η αλλαγή στρατηγικής του, δεν αποφέρει καμία αύξηση στο αρχικό κέρδος του, τότε έχουμε ισορροπία.

Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση $n=9$, $k=3$ και $d=5$. Η απεικόνιση του δίνει ακριβώς τον ίδιο γράφο με τις ίδιες χορδές.

Περίπτωση 5:

$$n = 10$$

$$k = 5$$

$$d = 3$$

$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

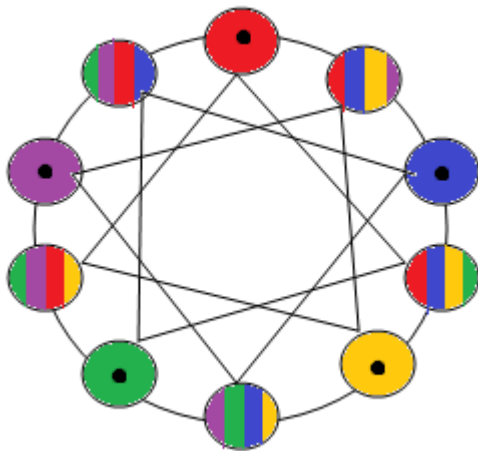
$$\text{Θέση παίκτη 1: } 0 \cdot 10/5 = 0$$

$$\text{Θέση παίκτη 2: } 1 \cdot 10/5 = 2$$

$$\text{Θέση παίκτη 3: } 2 \cdot 10/5 = 4$$

$$\text{Θέση παίκτη 4: } 2 \cdot 10/5 = 6$$

$$\text{Θέση παίκτη 5: } 2 \cdot 10/5 = 8$$



Κέρδη Παικτών:

$$\text{Κόκκινος Παίκτης} = 2$$

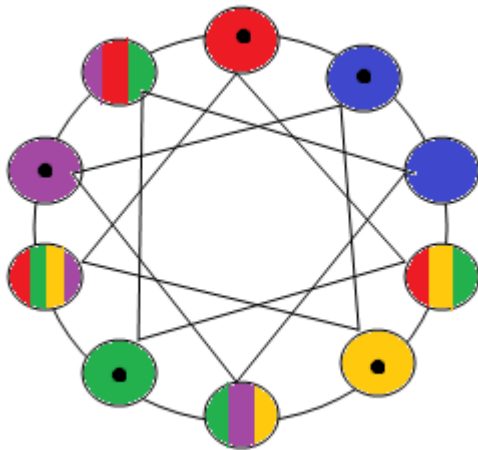
$$\text{Μπλέ Παίκτης} = 2$$

$$\text{Κίτρινος Παίκτης} = 2$$

$$\text{Πράσινος Παίκτης} = 2$$

$$\text{Μωβ Παίκτης} = 2$$

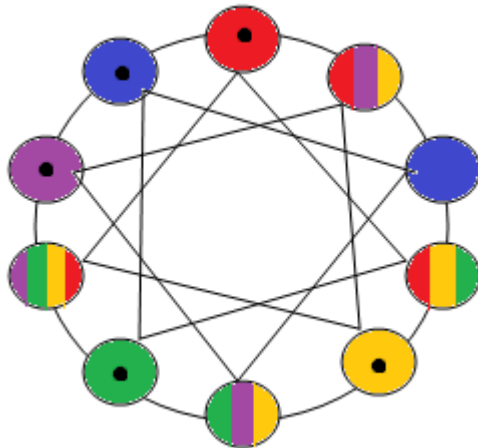
Μετακινούμε τον μπλε παίκτη από τη θέση $i=2$ στη θέση $i=1$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



$$\text{Κέρδος Μπλε Παίκτη} = 2 \leq 2$$

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης στους κόμβο $i=3$, γιατί δίνει το ίδιο κέρδος με την περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=1$ που προαναφέρθηκε.

Μετακινούμε τον μπλε παίκτη στη θέση $i=9$, ανάμεσα στον κόκκινο παίκτη και τον μωβ παίκτη, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Μπλε Παίκτη = $2 \leq 2$

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο και οι παίκτες είναι τοποθετημένοι στις ίδιες αποστάσεις μεταξύ τους, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε το κέρδος του παίκτη σε περίπτωση μετακίνησης στους κόμβο $i=5$ και $i=7$, γιατί δίνει το ίδιο κέρδος με την περίπτωση μετακίνησης στον κόμβο $i=1$ που προαναφέρθηκε. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, δεν χρειάζεται να γίνουν οι αντίστοιχες μετακινήσεις και για τους υπόλοιπους παίκτες καθ' ότι θα λάβουμε τα ίδια αποτελέσματα σε κάθε αντίστοιχη μετακίνηση.

Αφού η μετακίνηση του παίκτη, δηλαδή η αλλαγή στρατηγικής του, δεν αποφέρει καμία αύξηση στο αρχικό κέρδος του, τότε έχουμε ισορροπία.

Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την περίπτωση $n=10$, $k=5$ και $d=7$. Η απεικόνιση του δίνει ακριβώς τον ίδιο γράφο με τις ίδιες χορδές.

Περίπτωση 6:

$$n = 15$$

$$k = 5$$

$$d = 3$$

$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

Η αρχική τοποθεσία των παικτών είναι στις θέσεις $j \cdot n/k$, δηλαδή:

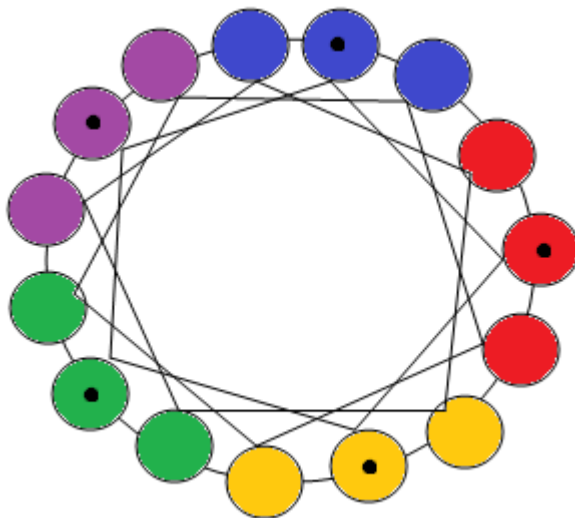
$$\text{Θέση παίκτη 1: } 0 \cdot 10/5 = 0$$

$$\text{Θέση παίκτη 2: } 1 \cdot 10/5 = 3$$

$$\text{Θέση παίκτη 3: } 2 \cdot 10/5 = 6$$

$$\text{Θέση παίκτη 4: } 2 \cdot 10/5 = 9$$

$$\text{Θέση παίκτη 5: } 2 \cdot 10/5 = 12$$



Κέρδη Παικτών:

Μπλέ Παίκτης = 3

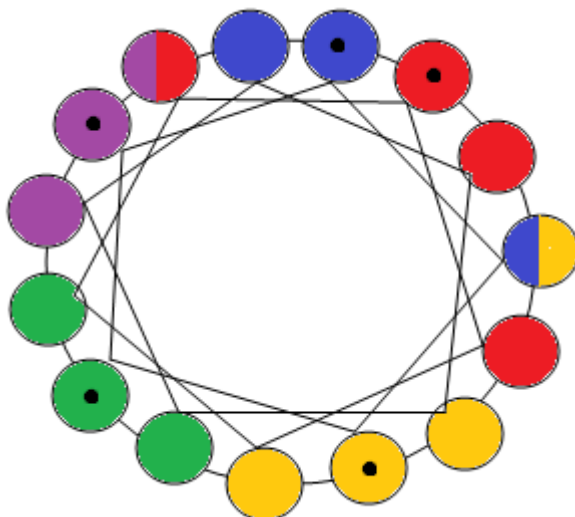
Κόκκινος Παίκτης = 3

Κίτρινος Παίκτης = 3

Πράσινος Παίκτης = 3

Μωβ Παίκτης = 3

Μετακινούμε τον κόκκινο παίκτη από τη θέση $i=3$ στη θέση $i=1$, στη γειτονιά του, και ελέγχουμε το κέρδος του.



Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = $3,5 \leq 3$

Παρατηρούμε ότι με αλλαγή στρατηγικής, ο κόκκινος παίκτης αυξάνει το κέρδος του. Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε τις άλλες περιπτώσεις αλλαγής στρατηγικής και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν έχουμε ισορροπία.

Περίπτωση 7:

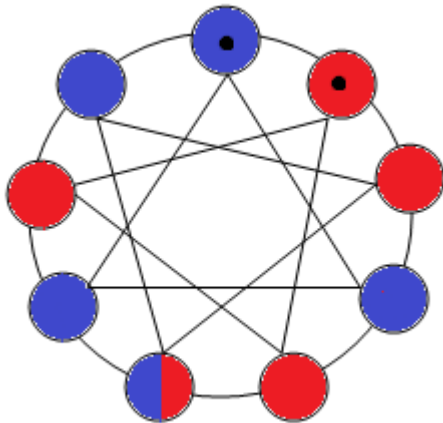
$n = 9$

$k = 2$

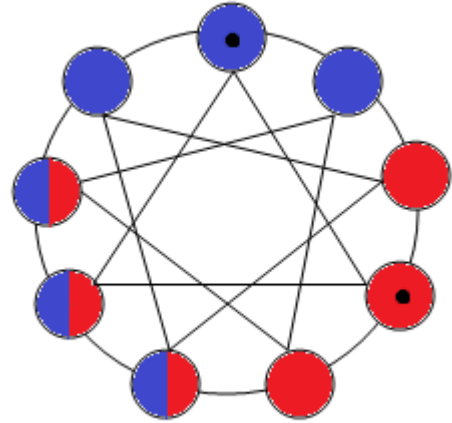
$d = 3$

$j = 0 \leq j < k$ ξεκινώντας από το 0 και αυξάνοντας κατά 1.

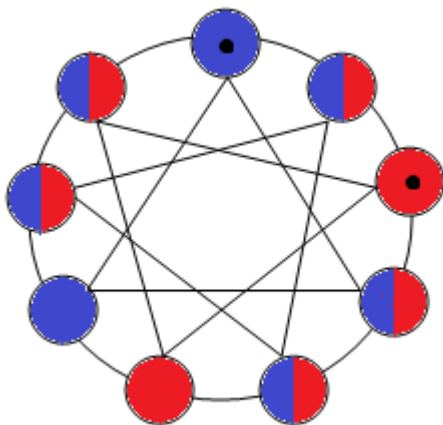
Στις περιπτώσεις των 2 παικτών, δεν παίζει μεγάλο ρόλο η αρχική θέση των παικτών. Όποιους κόμβους και να καταλάβουν οι 2 παίκτες το κέρδος του καθενός ισούται πάντοτε με n/k .



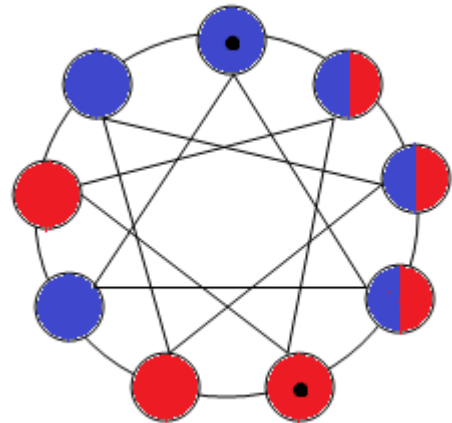
Κέρδος Μπλε Παίκτη = 4,5
Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = 4,5



Κέρδος Μπλε Παίκτη = 4,5
Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = 4,5



Κέρδος Μπλε Παίκτη = 4,5
Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = 4,5



Κέρδος Μπλε Παίκτη = 4,5
Κέρδος Κόκκινου Παίκτη = 4,5

Λόγω του ότι πρόκειται για κύκλο, οι ίδιες περιπτώσεις του αριστερού ημισφαίριου του κύκλου δίνουν τα ίδια αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά που φαίνονται πιο πάνω και έτσι παραλείπονται. Για τον ίδιο λόγο δεν χρειάζεται να δούμε τις περιπτώσεις του μπλε παίκτη. Αφού η μετακίνηση του παίκτη, δηλαδή η αλλαγή στρατηγικής του, δεν αποφέρει καμία αύξηση στο αρχικό κέρδος του, τότε έχουμε ισορροπία.

4.2 Συμπεράσματα

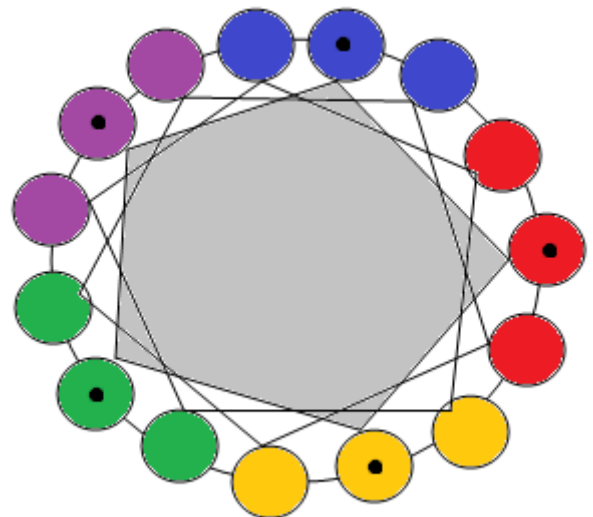
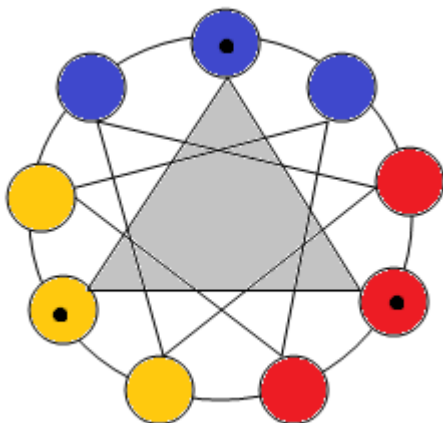
Θεωρούμε n το πλήθος των κόμβων, k το πλήθος των παικτών, d η απόσταση χορδής και j ένας μετρητής που ξεκινά από το 0 μέχρι το $k-1$ (για κάθε παίκτη του παιγνιδιού).

Βάσει των παραδειγμάτων που προηγήθηκαν, έχω καταλήξει στις εξής ικασίες:

- Στις περιπτώσεις 2 παικτών έχουμε πάντα ισορροπία ανεξάρτητα από το πλήθος των κόμβων και την απόσταση της χορδής. Το κέρδος κάθε παίκτη ισούται πάντα με n/k .
- Όταν προστεθούν οι χορδές στον γράφο, οι χορδές δημιουργούν πολύγωνα. Αν κάθε γωνιά του ίδιου πολυγώνου εφάπτεται σε κόμβο με παίκτη, ώστε όλες οι γωνιές να καλύπτουν όλους τους παίκτες, σχηματίζοντας πολύγωνο με k γωνιές, τότε ο γράφος δεν έχει ισορροπία.

Επίσης, οι παίκτες είναι τοποθετημένοι αρχικά στις θέσεις του γράφου $j \cdot n/k$, δηλαδή οι παίκτες ισαπέχουν ο ένας από τον άλλο και επίσης n είναι πολλαπλάσιο του k . Δηλαδή, ο πρώτος παίκτης ($j=0$) θα τοποθετηθεί στην θέση $0 \cdot n/k$ (με αρίθμηση σύμφωνα με τη φορά του ρολογιού, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4), ο δεύτερος παίκτης ($j=1$) θα τοποθετηθεί στην θέση $1 \cdot n/k$ κ.ο.κ. Τα πολύγωνα k γωνιών σχηματίζονται όταν από κάθε κόμβο με παίκτη ξεκινά μία χορδή και καταλήγει στον αμέσως επόμενο κόμβο με παίκτη. Μετά η επόμενη χορδή ξεκινά από τον κόμβο αυτό και καταλήγει στον αμέσως επόμενο κόμβο με παίκτη κτλ. Αυτό συνεχίζεται μέχρι να επιστρέψει η ακμή της χορδής πίσω στον κόμβο που ξεκίνησε και δημιουργηθεί το πολύγωνο k γωνιών.

Στα πιο κάτω παραδείγματα μη ισορροπίας παρουσιάζονται με γκριζό χρώμα τα πολύγωνα που δημιουργούνται σε περίπτωση που δεν έχουμε ισορροπία σε 2 διαφορετικούς κυκλικούς γράφους με χορδή (οι οποίοι έχουν αναλυθεί προηγουμένως):



Όπως φαίνεται στα πιο πάνω σχήματα, κάθε γωνιά ενός από τα πολύγωνα πλήθους d (3 στις συγκεκριμένες περιπτώσεις) που δημιουργούνται εξαιτίας των χορδών, εφάπτεται στους k κόμβους με παίκτη. Με άλλα λόγια, όταν υπάρχουν χορδές πλήθους ίσο με το πλήθος των παικτών, όπου και τα 2 άκρα τους εφάπτονται σε κόμβο με παίκτη, τότε δεν έχουμε ισορροπία.

Κεφάλαιο 5

Σύνοψη

Οι βάσεις των ανταγωνιστικών παιγνίων τοποθέτησης εξυπηρετητών τέθηκαν από το μοντέλο Hotelling [11] παρουσιάζοντας ένα απλό μοντέλο από δύο πωλητές παγωτού σε μία ευθεία παραλίας. Έπειτα ακολούθησαν σπουδαίες μελέτες, εκ των οποίων η πολύ σημαντική μελέτη του John Nash, η οποία έδειξε πως η ισορροπία Nash [16], η οποία πήρε και το όνομα του, σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αδύνατον να προβλεφθεί. Ως επακόλουθο του συμπεράσματος αυτού, πολλοί επιστήμονες άρχισαν να μελετούν τρόπους πρόβλεψης της ισορροπία Nash.

Στην εργασία μου έχει μελετηθεί η ισορροπία Nash σε παίγνια Voronoi σε ακατεύθυντους γράφους [5], στην οποία έχει αποδειχθεί η ύπαρξη ενός απλού γράφου που δεν επιτρέπει την ισορροπία Nash, ακόμα και στην περίπτωση των 2 παικτών. Επίσης, το να αποφασιστεί η ύπαρξη ισορροπίας Nash σε γενικούς γράφους με αυθαίρετο πλήθος παικτών είναι NP-δύσκολο. Έχει επίσης εισαχθεί η έννοια του κοινωνικού κόστους διαφοροποίησης, ως ο μέγιστος λόγος μεταξύ των κοινωνικών κόστων 2 ισορροπιών Nash. Για συνδεδεμένους γράφους, έχει αποδειχθεί πως το κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης είναι $\Omega(\sqrt{n/k})$ και $O(\sqrt{nk})$. Ο χαρακτηρισμός που δόθηκε, όμως, για όλες τις ισορροπίες Nash αποδείχθηκε λανθασμένος και χρειάστηκε κάποιες τροποποιήσεις. Οι τροποποιήσεις αυτές δώθησαν σε μελέτη που πραγματοποιήθηκε ένα χρόνο αργότερα [15]. Έχει δοθεί ο ακριβής χαρακτηρισμός όλων των ισορροπιών Nash, τα κριτήρια ύπαρξης ισορροπίας καθώς επίσης και τα ακριβή τιμήματα αναρχίας και σταθερότητας. Έχει αποδειχθεί πως οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικής που τοποθετεί τους παίκτες με τέτοιο τρόπο ώστε να ισαπέχουν ο ένας από τον άλλο, σύμφωνα με τον κύκλο, αποτελεί ισορροπία Nash. Επίσης, τα προφίλ στρατηγικής σε κυκλικό γράφο όπου οι παίκτες είναι τοποθετημένοι σε σχεδόν ισαπέχουσες αποστάσεις μεταξύ τους έχουν βέλτιστο κοινωνικό κόστος. Παράλληλα, καμία ισορροπία Nash δεν έχει κοινωνικό κόστος μεγαλύτερο από $\frac{9}{4}$ φορές το βέλτιστο κόστος.

Στη μελέτη για ισορροπία Nash σε μεταβατικούς γράφους [8], μελετήθηκαν οι γράφοι οι οποίοι είναι μεταβατικοί κατά τις κορυφές τους, δηλαδή φαίνονται οι ίδιοι από κάθε κόμβο. Έχει αποδειχθεί πως για τους γενναιόδωρα μεταβατικούς κατά τις κορυφές τους γράφους, οποιαδήποτε τοποθέτηση για τους 2 παίκτες αποδίδει σε ισορροπία Nash. Το ίδιο όμως δεν ισχύει και για τους κυβικά συνδεδεμένους κύκλους. Αφού στάθηκε αδύνατον να συνεχιστεί η μελέτη στον ίδιο γράφο για άνω των 2 παικτών, καθιερώθηκε το Θεώρημα των Δύο Φρουρών για φιλικούς γράφους για την περίπτωση των 3 παικτών. Στην περίπτωση των 4 παικτών, στην περίπτωση όπου επιτρέπονται άνω του ενός παίκτη στον ίδιο κόμβο, έχει αποδειχθεί η ύπαρξη ισορροπίας για ένα αυθαίρετο φιλικό γράφο. Στην περίπτωση όπου δεν επιτρέπονται άνω του ενός παίκτη στον ίδιο κόμβο, αλλά πάλι για 4 παίκτες, το θεώρημα ισχύει μόνο υποθέτοντας πως ο φιλικός γράφος είναι διμερής και έχει περιττή διάμετρο.

Ως γενίκευση των παιγνίων Voronoi, προτάθηκαν τα παίγνια απομόνωσης [17], όπου η διαφορά τους από τα παίγνια Voronoi [5] είναι ότι ο στόχος κάθε παίκτη είναι να τοποθετηθεί όσο πιο μακριά γίνεται από τους υπόλοιπους παίκτες. Έχει αποδειχθεί ότι το να αποφασιστεί η ύπαρξη ισορροπίας Nash στα παίγνια αυτά είναι NP-δύσκολο. Επίσης, για τα παίγνια απομόνωσης όπου κάθε παίκτης επιθυμεί να μεγιστοποιήσει την απόσταση του από τον m -πλησιέστερο παίκτη, και για κάθε m , υπάρχει πάντοτε ισορροπία. Στην περίπτωση του $m=1$, το παίγνιο είναι ένα παίγνιο ισχύος. Το ίδιο όμως δεν συμβαίνει στην περίπτωση όπου $m>1$. Γενικότερα έχει αποδειχθεί πως σε κάθε συμμετρικό χώρο τα παίγνια απομόνωσης πλησιέστερου γείτονα και συνολικής απόστασης είναι παίγνια ισχύος, τα οποία συνεπάγονται την ύπαρξη ισορροπίας Nash και τη σύγκλιση οποιουδήποτε δυναμικού καλύτερης αντίδρασης. Παράλληλα, στο συμμετρικό χώρο, για τα παίγνια απομόνωσης ℓ -επιλογής, έχει αποδειχθεί πως υπάρχει πάντα ισορροπία Nash και πως υπάρχει πάντα ένα δυναμικό καλύτερης αντίδρασης που συγκλίνει σε ισορροπία ακόμα κι αν το παίγνιο δεν αποτελεί παίγνιο ισχύος. Για μη συμμετρικούς χώρους και μη μηδενικά διανύσματα βάρους, υπάρχει πάντοτε ένα παίγνιο που δεν έχει ισορροπία Nash.

Έχει επίσης μελετηθεί η γνήσια ισορροπία Nash στα παίγνια απομόνωσης ℓ -επιλογής και στα παίγνια απομόνωσης συνολικής απόστασης [4]. Για τα παίγνια απομόνωσης ℓ -κατάληξης έχει αποδειχθεί πως η ισορροπία Nash δεν μπορεί να υπάρξει.

Ως επέκταση των παιγνίων Voronoi σε κυκλικό ακατεύθυντο γράφο, έχω μελετήσει (χωρίς να υποβάλω αποδείξεις) τα παίγνια Voronoi σε κυκλικό ακατεύθυντο γράφο με χορδή και την ισορροπία Nash σ' αυτούς. Στις περιπτώσεις που έχω μελετήσει οι παίκτες είναι αρχικά τοποθετημένοι σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους και το πλήθος των κόμβων είναι πολλαπλάσιο του πλήθους των παικτών. Στη μελέτη μου αυτή έχω καταλήξει στο συμπέρασμα πως όταν υπάρχουν χορδές πλήθους ίσο με το πλήθος των παικτών, όπου και τα 2 άκρα τους εφάπτονται σε κόμβο με παίκτη, τότε δεν έχουμε ισορροπία.

Πίνακας Ελληνικών Ορισμών

Πιο κάτω παρουσιάζεται ο πίνακας των ελληνικών ορισμών που χρησιμοποιήθηκαν στα πλαίσια της εργασίας μου, με τους αντίστοιχους αγγλικούς.
(με αλφαβητική σειρά)

ανταγωνιστική τοποθέτηση εξυπηρετητών	competitive facility location
βέλτιστη αντίδραση	best response
γράφος μεταβατικός κατά τις κορυφές του	vertex-transitive graph
γράφος γενναιόδωρα μεταβατικός κατά τις κορυφές του	generously vertex-transitive graph
διάνυσμα Αθροίσματος	sum vector
διάνυσμα ℓ -επιλογής	ℓ -selection vector
διάνυσμα ℓ -κατάληξης	ℓ -suffix vector
διμερής γράφος	bipartite graph
διμερής τόρος d-διαστάσεων	d-dimensional bipartite torus
δυναμικό βέλτιστης αντίδρασης	best response dynamic
δυναμικό καλύτερης αντίδρασης	better response dynamic
ισχύς βέλτιστης αντίδρασης	better response potential
ισχύς καλύτερης αντίδρασης	best response potential
καλύτερη αντίδραση	better response
κοινό προφίλ στρατηγικής	standard strategy profile
κοινωνική συνάρτηση	social function
κοινωνικό κόστος	social cost
κοινωνικό κόστος διαφοροποίησης	social cost discrepancy
κυβικά συνδεδεμένοι κύκλοι d-διαστάσεων	d-dimensional cube-connected-cycles
μονοτονικά Αυξανόμενα Παίγνια	monotonically increasing games
μονοτονικά Μειωμένα Παίγνια	monotonically decreasing games
παίγνια απομόνωσης	isolation games
παίγνια πλησιέστερου γείτονα	nearest neighbor games
παίγνια συνολικής απόστασης	total distance games
παίγνιο ισχύος	potential game
πρόβλημα 3-ΔΙΑΜΟΙΡΑΣΗ	3-PARTITION problem
πρόβλημα ΣΥΝΟΛΟΥ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗΣ	SET PACKING problem
πρόβλημα ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ	3D MATCHING problem
πρόβλημα Τοποθέτησης Εξυπηρετητών	facility Location Problem
συνάρτηση ισχύος	potential function
τίμημα αναρχίας	price of anarchy
τίμημα σταθερότητας	price of stability
τόροι με περιττή διάμετρο	tori with odd diameter
τόρος	torus
υπερκύβος d διαστάσεων	d-dimensional hypercube

Βιβλιογραφία

- [1] Hee-Kap Ahn, Siu-Wing Cheng, Otfried Cheong, Mordecai J. Golin, René van Oostrum: “Competitive facility location: the Voronoi game.” *Theor. Comput. Sci.* 310(1-3): 457-467 (2004)
- [2] Hee-Kap Ahn, Siu-Wing Cheng, Otfried Cheong, Mordecai J. Golin, René van Oostrum: “Competitive Facility Location along a Highway.” *COCOON 2001*: 237-246
- [3] E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. Kleinberg, T. Roughgarden, É. Tardos, and T. Wexler. “The price of stability for network design with fair cost allocation.” In *Proceedings of the 45th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS’04)*, pages 295–304, 2004. DOI: 10.1109/FOCS.2004.68.
- [4] Vittorio Bilò, Michele Flammini, Gianpiero Monaco, Luca Moscardelli: “On the Performances of Nash Equilibria in Isolation Games.” *COCOON 2009*: 17-26
- [5] C. Durr and N. K. Thang: “Nash Equilibria in Voronoi Games on Graphs,” *Proceedings of the 15th Annual European Symposium on Algorithms*, pp. 17—28, Vol. 4698, LNCS, 2007.
- [6] H. A. Eiselt and G. Laporte, “Competitive spatial models”, *European Journal of Operational Research*, 39:231-242, (1989).
- [7] H. A. Eiselt, G. Laporte, and J-F. Thisse, “Competitive location models: Aframework and bibliography”, *Transportation Science*, 27:44-54 (1993).
- [8] Rainer Feldmann, Marios Mavronicolas, Burkhard Monien: “Nash Equilibria for Voronoi Games on Transitive Graphs.” In *Proceedings of WINE'2009*. pp.280~291

- [9] R. L. Francis and J. A. White, “Facility Layout and Location”, Prentice-Hall, Inc., (1974).
- [10] Michael R. Garey and David S. Johnson. Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.
- [11] H. Hotelling. “Stability in competition.” *Computational Geometry: Theory and Applications*, 39(153):41–57, March 1929.
- [12] A. K. Jain, M. N. Murty and P. J. Flynn, “Data Clustering: A Review”, *ACM Computing Surveys*, Vol. 31, No. 3, (1999).
- [13] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In C. Meinel and S. Tison, editors, *Proceedings of the 16th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS’99)*, volume 1563 of LNCS, pages 404–413. Springer Verlag, 1999. DOI: 10.1007/3-540-49116-3_38.
- [14] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann, 1991.
- [15] M. Mavronicolas, B. Monien, V. G. Papadopoulou and F. Schoppmann: “Voronoi Games on Cycle Graphs,” *Proceedings of the 33rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pp.503—514, Vol. 5162, LNCS, 2008.
- [16] J. F. Nash, “Equilibrium points in n-person games”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48-49.(1950).
- [17] Yingchao Zhao, Wei Chen, Shang-Hua Teng: “The isolation game: A game of distances.” *Theor. Comput. Sci.* 410(47-49): 4905-4919 (2009)