

Ατομική Διπλωματική Εργασία

ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Παναγιώτης Στυλιανού

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μάιος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Αλγοριθμικά θέματα στην θεωρία παιγνίων

Παναγιώτης Στυλιανού

Επιβλέπων Καθηγητής
Μάριος Μαυρονικόλας

Η Ατομική Διπλωματική Εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Πληροφορικής του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Κύπρου

Περίληψη

Σε αυτό το γραπτό μελετούμε μια παραλλαγή παιγνίων Σκέλλινγκ. Συγκεκριμένα τροποποιούμε το μοντέλο Single-Peaked Swap Schelling Game των D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner και L.Molitor[2022], έτσι ώστε κάθε ομάδα παικτών να έχει διαφορετική συνάρτηση ωφέλειας και κορυφή. Ακολουθώντας μελετούμε το νέο μοντέλο για τις ίδιες περιπτώσεις σχετικά με την ύπαρξη συμφερουσών ανταλλαγών, καταστάσεων ισορροπίας και για τα όρια του κόστους αναρχία και κόστους σταθερότητας. Καταλήγουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε, οι ιδιότητες του προηγούμενο συνεχίζουν να ισχύουν και στο νέο μοντέλο, αλλά στο νέο μοντέλο μπορούμε να φτάσουμε στα ίδια συμπεράσματα με πιο ελαφρείς περιορισμούς.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή.....	1
	1.1 Εσασγωγή	1
Κεφάλαιο 2	Μοντέλο.....	2
	2.1 Μοντέλο	2
	2.2 Χρήσιμες Ιδιότητες	4
Κεφάλαιο 3	Συμφέρον ανταλλαγές.....	5
	3.1 Λήμμα 1	5
	3.2 Λήμμα 2	6
	3.3 Λήμμα 3	6
	3.4 Λήμμα 4	7
Κεφάλαιο 4	Καταστάσεις Ισορροπίας.....	9
	4.1 Θεώρημα 1	9
	4.2 Θεώρημα 2	10
	4.3 Θεώρημα 3	10
Κεφάλαιο 5	Κόστος Αναρχίας.....	12
	5.1 Θεώρημα 4	12
	5.2 Θεώρημα 5	12
	5.3 Θεώρημα 6	14
Κεφάλαιο 6	Κόστος Σταθερότητας.....	16
	6.1 Θεώρημα 7	16
	6.2 Θεώρημα 8	17
	6.3 Θεώρημα 9	17
	6.4 Θεώρημα 10	18
Κεφάλαιο 7	Συμπεράσματα.....	19
	7.1 Συμπεράσματα	19
Βιβλιογραφία		20

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

1

1.1 Εισαγωγή

Τα παίγνια Σκέλλινγκ είναι μοντέλα προσομοίωσης της κίνησης πληθυσμού τα οποία μοντελοποιούν το πώς άτομα επιλέγουν την τοποθεσία κατοικίας τους ανάλογα με τους γείτονες τους και το επίπεδο ανοχής τους σε άτομα από διαφορετικές ομάδες πληθυσμού. Το πρώτο τέτοιο μοντέλο δημιουργήθηκε από τον οικονομολόγο Τόμας Σκέλλινγκ το 1978 με σκοπό να μελετήσει το φαινόμενο του κοινωνικού διαχωρισμού. Δηλαδή την τάση ατόμων τις ίδιες ομάδες πληθυσμού να μαζεύονται και να δημιουργούν περιοχές με ομογενή πληθυσμό. Κατά την διάρκεια των χρόνων δημιουργήθηκαν μελετηθήκαν πολλές παραλλαγές του αρχικού μοντέλου με διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας και έμφαση σε διαφορετικές πτυχές του φαινομένου. Σε αυτό το γραπτό θα μελετήσουμε ακόμα μια τέτοια παραλλαγή. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε παραλλαγή του μοντέλου Single-Peaked Swap Schelling Game [D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor, 2022] και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του νέου με το προηγούμενο μοντέλο.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλο

2.1 Μοντέλο	2
2.2 Χρήσιμες Ιδιότητες	4

2.1 Μοντέλο

Στο μοντέλο που θα μελετήσουμε κάθε παίγνιο έχει 4 χαρακτηριστικά $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$. $G = (V, E)$ είναι ένας συνεκτικός γράφος πάνω στον οποίο θα κινούνται οι παίκτες. Το πλήθος των παικτών n είναι ίσο με το πλήθος των κόμβων στον γράφο $|V|$, άρα ο μόνος τρόπος που μπορούν οι παίκτες να κινηθούν είναι ανταλλάζοντας θέσεις. Οι παίκτες χωρίζονται σε δύο ομάδες τις οποίες ονομάζουμε μπλε ομάδα στην οποία ανήκουν οι μπλε παίκτες και κόκκινη ομάδα στην οποία ανήκουν οι κόκκινοι παίκτες. Ο αριθμός b ορίζει το πλήθος των παικτών που ανήκουν στην μειονότητα την οποία θέτουμε ότι θα είναι η μπλε ομάδα, άρα $b \leq n/2$.

Ορίζουμε ως στρατηγική σ μια πιθανή κατάσταση του παιγνίου ο οποία αντιστοιχεί κάθε συμμετέχων παίκτη σε ακριβώς ένα κόμβο του γράφου G , και κάθε κόμβο σε ακριβώς ένα παίκτη. Με $\sigma(i)$ αναφερόμαστε στον κόμβο στον οποίο βρίσκεται ο παίκτης i στην στρατηγική σ και $1_{ij}(\sigma) = 1$ όταν δύο παίκτες βρίσκονται σε γειτονικούς κόμβους στην στρατηγική σ , αλλιώς $1_{ij}(\sigma) = 0$.

Ο στόχος των παικτών είναι να μεγιστοποιήσουν την ωφέλεια τους. Η ωφέλεια κάποιου παίκτη i σε μια στρατηγική σ : $U_i(\sigma)$ υπολογίζεται με βάση μια συνάρτηση ωφέλειας p_i και το ποσοστό $f_i(\sigma) = x_i/y_i$ όπου x_i είναι το πλήθος των παικτών στην γειτονία του i που ανήκουν στην ίδια ομάδα με τον i και y_i το πλήθος όλων των παικτών στην γειτονία του i , άρα έχουμε $U_i(\sigma) = p_i(f_i(\sigma))$, $f_i(\sigma) = x_i/y_i$, $x_i = |\{\sigma(i)\} \cup \{u \in V : \{u, \sigma(i)\} \in E, c(u) = c(\sigma(i))\}|$, $y_i = |\{\sigma(i)\} \cup \{u \in V : \{u, \sigma(i)\} \in E\}|$ με $c(\sigma(i)) = c(i)$ το χρώμα του παίκτη i .

Για την μελέτη δεν θα χρησιμοποιήσουμε συγκεκριμένη συνάρτηση ωφέλειας p_i αλλά υποθέτουμε ότι η p_i ικανοποιεί κάποιες προϋποθέσεις. Η συνάρτηση ορίζεται στο $[0, 1]$ και έχει μηδενική τιμή στα άκρα: $p_i(0) = p_i(1) = 0$. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή $p_i(\Lambda_i) = 1$, όπου Λ_i ονομάζεται η κορυφή της συνάρτησης και είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \Lambda_i]$. Για $x > \Lambda_i$

ισχύει ότι $p_i(x) = p_i(\frac{\Lambda_i}{1 - \Lambda_i} (1 - x))$. Κάθε παίγνιο θα χρησιμοποιεί δύο συναρτήσεις p_b και p_r , μια για κάθε ομάδα, οι οποίες θα μας δίνουν την ωφέλεια των παικτών της μπλε και κόκκινης ομάδας αντίστοιχα και έχουν κορυφή Λ_b και Λ_r αντίστοιχα. Αυτό το σημείο διαφοροποιεί το νέο μοντέλο από το προηγούμενο το οποίο έχει μόνο μια συνάρτηση p και ένα αντίστοιχο Λ το οποίο χρησιμοποιούν και οι δύο ομάδες. Άρα το προηγούμενο μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί σαν ειδική περίπτωση του νέου όπου $p_b = p_r$ και $\Lambda_b = \Lambda_r$.

Όταν δύο παίκτες i, j στην στρατηγική σ ανταλλάξουν θέση ορίζουμε την νέα στρατηγική που δημιουργείται από την ανταλλαγή σ_{ij} . Αφού, όμως, οι παίκτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την ωφέλεια τους, ανταλλαγές γίνονται μόνο όταν αυξάνουν την ωφέλεια και των δύο παικτών, δηλαδή πρέπει να ισχύει $U_i(\sigma_{ij}) > U_i(\sigma)$ και $U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma)$. Ονομάζουμε αυτές τις ανταλλαγές, συμφέρουσες ανταλλαγές. Όταν σε μια στρατηγική σ δεν υπάρχουν συμφέρων ανταλλαγές λέμε ότι η σ βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Μετρούμε την ωφέλεια μιας στρατηγικής με βάση το επίπεδο ενσωμάτωσης $DoI(\sigma)$ της στρατηγικής. Στρατηγικές με ψηλότερο επίπεδο ενσωμάτωσης θεωρούνται καλύτερες. Επίπεδο ενσωμάτωσης είναι το πλήθος των παικτών οι οποίοι θεωρούνται κοινωνικά ενσωματωμένοι, δηλαδή έχουν τουλάχιστον ένα γείτονα που ανήκει σε διαφορετική ομάδα. Σε ένα παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ ορίζουμε στρατηγική σ^* μια στρατηγική η οποία μας δίνει το μέγιστο δυνατό επίπεδο ενσωμάτωσης για το συγκεκριμένο παίγνιο και $SE(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ το σύνολο των στρατηγικών που βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας. Για να μελετήσουμε την επίδραση του εγωισμού των παικτών στην ωφέλεια μιας στρατηγικής υπολογίζοντας το

κόστος αναρχίας: $PoA(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) = \frac{DoI(\sigma^*)}{\min_{\sigma \in SE(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)} DoI(\sigma)}$ και το κόστος

σταθερότητας: $PoS(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) = \frac{DoI(\sigma^*)}{\max_{\sigma \in SE(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)} DoI(\sigma)}$ τα οποία

αντιπροσωπεύουν τη μέγιστη και ελάχιστη επίδραση αντίστοιχα.

Για να μελετήσουμε όλα τα προαναφερόμενα θα εκμεταλλευτούμε ιδιότητες από διαφορετικά είδη γράφων. Με $\delta(u) = |\{u \in V: \{u, v\} \in E\}|$ αναφερόμαστε στο βαθμό του κόμβου u και με $\Delta(G)$ και $\delta(G)$ στον μέγιστο και ελάχιστο βαθμό κόμβου που υπάρχει στο γράφο G . Ονομάζουμε κανονικούς τους γράφους όπου κάθε κόμβος έχει τον ίδιο βαθμό και σχεδόν-κανονικούς τους γράφους όπου $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$. Ορίζουμε $\alpha(G)$ το πλήθος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου του G , δηλαδή του μέγιστου συνόλου κόμβων οι οποίοι δεν είναι γειτονικοί μεταξύ τους και ονομάζουμε διμερής τους γράφους που αποτελούνται από 2 ανεξάρτητα σύνολα.

2.2 Χρήσιμες Ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο σημειώνουμε όλες τις ιδιότητες από διαφορετικά γραπτά που εκμεταλλευόμαστε.

Ιδιότητα 1: Όταν $f_i(\sigma) < \frac{1}{2}$, τότε $f_j(\sigma_{ij}) > \frac{1}{2}$ και όταν $f_i(\sigma) > \frac{1}{2}$, τότε $f_j(\sigma_{ij}) < \frac{1}{2}$ εκτός αν $y_i = 2x_i - 1$ και $1_{ij}(\sigma) = 0$, στην οποία περίπτωση $f_j(\sigma_{ij}) = f_i(\sigma) > \frac{1}{2}$. [D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor, 2022, Observation 1]

Ιδιότητα 2: Σε κατάσταση ισορροπίας οποιουδήποτε παιγνίου είναι αδύνατο να υπάρχουν απομονωμένοι παίκτες διαφορετικού χρώματος. [D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor, 2022, Lemma 5]

Ιδιότητα 3: Για κάθε παίγνιο ισχύει ότι $\text{DoI}(\sigma^*) \leq \min\{(\Delta(G)+1)b, n\}$. [D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor, 2022, Lemma 6]

Κεφάλαιο 3

Συμφέρουσες Ανταλλαγές

3.1 Λήμμα 1	5
3.2 Λήμμα 2	6
3.3 Λήμμα 3	6
3.4 Λήμμα 4	7

3.1 Λήμμα 1

Για οποιαδήποτε $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$, δεν υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ δύο παικτών που βρίσκονται κάτω από την κορυφή.

Απόδειξη: Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει στρατηγική σ όπου υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ των παικτών i και j , όπου $f_i(\sigma) < \Lambda_i$ και $f_j(\sigma) < \Lambda_j$. Έστω, $f_i(\sigma) = x_i/y_i < \Lambda_i < \frac{1}{2}$, με βάση την Ιδιότητα 1:

$$f_j(\sigma_{ij}) = \frac{y_i + 1 - x_i - 1_{ij}(\sigma)}{y_i} > \frac{1}{2} \geq \Lambda_j.$$

Αφού $f_j(\sigma_{ij}) > \Lambda_j$, τότε με βάση τον ορισμό του p_i :

$$U_j(\sigma_{ij}) = p_j(f_j(\sigma_{ij})) = p_j\left(\frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j}(1 - f_j(\sigma_{ij}))\right) = p_j\left(\frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j}\left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{1 - 1_{ij}(\sigma)}{y_i}\right)\right)$$

Αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή ισχύει ότι $U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma)$ άρα

$$p_j\left(\frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j}\left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{1 - 1_{ij}(\sigma)}{y_i}\right)\right) > p_j(f_j(\sigma)).$$

Το οποίο μαζί με το ότι $\frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j}\left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{1 - 1_{ij}(\sigma)}{y_i}\right) < \Lambda_j$, $f_j(\sigma) < \Lambda_j$ και το ότι το p_j φθίνει στο

$[0, \Lambda_j]$ μας δίνει ότι

$$f_i(\sigma) = \frac{x_i}{y_i} \geq \frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j}\left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{1 - 1_{ij}(\sigma)}{y_i}\right) > f_j(\sigma)$$

αφού $\frac{\Lambda_j}{1 - \Lambda_j} \leq 1$ και $1 - 1_{ij}(\sigma) \geq 0$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με το i και j αντίστροφα καταλήγουμε ότι $f_j(\sigma) > f_i(\sigma)$, το οποίο προκαλεί αντίφαση.

3.2 Λήμμα 2

Για οποιαδήποτε $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$ δεν υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ γειτονικών παικτών που βρίσκονται σε διαφορετική πλευρά της κορυφής τους.

Απόδειξη: Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει στρατηγική σ με συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ των παικτών i και j όπου $f_i(\sigma) < \Lambda_i$, $f_j(\sigma) > \Lambda_j$ και $l_{ij}(\sigma) = 1$. Από το 2.1 συμπεραίνουμε ότι $f_j(\sigma_{ij}) > \Lambda_j$. Αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή, ισχύει ότι $U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma)$, το οποίο μαζί με το ότι $f_i(\sigma) > \Lambda_j$, $f_i(\sigma_{ij}) > \Lambda_j$ και p_j φθίνει στο $[\Lambda_j, 1]$ μας δίνει:

$$f_j(\sigma_{ij}) < f_j(\sigma) \Rightarrow \frac{y_i + 1 - x_i - l_{ij}(\sigma)}{y_i} < \frac{x_j}{y_j} \Rightarrow 1 - \frac{x_j}{y_j} < \frac{x_i}{y_i} = f_i(\sigma)$$

Από το

$$f_i(\sigma_{ij}) = \frac{y_j + 1 - x_j - l_{ij}(\sigma)}{y_j} = 1 - \frac{x_j}{y_j} < f_i(\sigma) < \Lambda_i$$

καταλήγουμε ότι $U_i(\sigma_{ij}) < U_i(\sigma)$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι υπάρχει συμφέρουσα αλλαγή μεταξύ των i και j .

3.4 Λήμμα 3

Για οποιαδήποτε $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$ δεν υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ δύο παικτών i, j που βρίσκονται σε διαφορετική πλευρά της κορυφής τους με $f_i(\sigma) < \Lambda_i$ και $f_j(\sigma) > \Lambda_j$, όταν ισχύει $\delta(\sigma(i)) \leq \delta(\sigma(j))$.

Απόδειξη: Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει στρατηγική σ όπου υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ των i, j και ότι ισχύει $\delta(\sigma(i)) \leq \delta(\sigma(j))$. Αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή, με βάση το Λήμμα 2 πρέπει να ισχύει $l_{ij}(\sigma) = 0$. Από την Ιδιότητα 1 παίρνουμε ότι $f_j(\sigma_{ij}) > \Lambda_j$, το οποίο μαζί με το ότι $f_j(\sigma) > \Lambda_j$ και $U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma)$ μας δίνει

$$U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma) \Rightarrow f_j(\sigma_{ij}) < f_j(\sigma) \Rightarrow 1 + \frac{1 - x_i}{y_i} < \frac{x_j}{y_j}.$$

Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα παίρνουμε ότι

$$f_i(\sigma_{ij}) = 1 + \frac{1}{y_j} - \frac{x_j}{y_j} < 1 + \frac{1}{y_j} - 1 - \frac{1 - x_i}{y_i} = \frac{1}{y_j} - \frac{1}{y_i} + \frac{x_i}{y_i}.$$

Από το $\delta(\sigma(i)) \leq \delta(\sigma(j))$ παίρνουμε ότι $y_i \leq y_j$, άρα $1/y_j - 1/y_i \leq 0$, το οποίο μας δίνει ότι

$$f_i(\sigma_{ij}) < \frac{1}{y_j} - \frac{1}{y_i} + \frac{x_i}{y_i} < \frac{x_i}{y_i} = f_i(\sigma) \leq \Lambda_i$$

με βάση το οποίο καταλήγουμε στο $U_i(\sigma_{ij}) \leq U_i(\sigma)$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι η ανταλλαγή συμφέρει.

3.5 Λήμμα 4

Για οποιαδήποτε $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$ σε σχεδόν-κανονικό γράφο δεν υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ δύο παικτών που βρίσκονται σε διαφορετική πλευρά της κορυφής τους.

Απόδειξη: Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει στρατηγική σ σε σχεδόν-κανονικό γράφο όπου $f_i(\sigma) < \Lambda_i$, $f_j(\sigma) > \Lambda_j$ και υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ των παικτών i και j . Αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή, με βάση το Λήμμα 2, ισχύει ότι $1_{ij}(\sigma) = 0$, και με βάση το Λήμμα 3 ισχύει ότι $\delta(\sigma(i)) > \delta(\sigma(j))$, άρα $y_i > y_j$ και αφού βρισκόμαστε σε σχεδόν-κανονικό γράφο, ισχύει ότι $y_j + 1 = y_i = y$. Από την Ιδιότητα 1 ξέρουμε ότι $f_j(\sigma_{ij}) > \Lambda_j$ άρα

$$U_j(\sigma_{ij}) > U_j(\sigma) \Rightarrow f_j(\sigma_{ij}) < f_j(\sigma) \Rightarrow \frac{y_i + 1 - x_i}{y_i} < \frac{x_j}{y_j} \Rightarrow y(y + 2 - x_i) < x_j(y + 1)$$

και αφού όλοι οι αριθμοί είναι ακέραιοι καταλήγουμε στο

$$y(y + 2 - x_i) + 1 \leq x_j(y + 1).$$

Για το $f_i(\sigma_{ij})$ έχουμε 2 περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $f_i(\sigma_{ij}) \leq \Lambda_i$

Αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή πρέπει να ισχύει ότι $f_i(\sigma) < f_i(\sigma_{ij}) \leq \Lambda_i$ άρα έχουμε

$$\frac{y_j + 1 - x_j}{y_j} > \frac{x_i}{y_i} \Rightarrow x_j(y + 1) < (y + 1)^2 - yx_i \Rightarrow y(y + 2 - x_i) + 1 < (y + 1)^2 - yx_i \Rightarrow 0 < 0$$

το οποίο είναι άτοπο.

Περίπτωση 2: $f_i(\sigma_{ij}) > \Lambda_i$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$f_i(\sigma_{ij}) > \Lambda_i \Rightarrow \frac{y_j + 1 - x_j}{y_j} \Rightarrow y + 1 - x_j > y\Lambda_i$$

και

$$f_i(\sigma) < \Lambda_i \Rightarrow \Lambda_i + y\Lambda_i > x_i \Rightarrow y + 1 - x_j + \Lambda_i + y\Lambda_i > x_i + y\Lambda_i \Rightarrow x_j < \Lambda_i + y + 1 - x_i$$

Αφού ξέρουμε ότι όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιοι και το $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$, καταλήγουμε στο

$$x_j \leq y + 1 - x_i$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε ότι

$$y(y + 2 - x_i) + 1 \leq x_j(y + 1) \Rightarrow \frac{y(y + 2 - x_i) + 1}{y + 1} \leq x_j \leq y + 1 - x_i \Rightarrow x_i \leq 0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι το $x_i \geq 1$.

Αφού σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε αντίφαση, η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη.

Κεφάλαιο 4

Καταστάσεις Ισορροπίας

4.1 Θεώρημα 1	.9
4.2 Θεώρημα 2	10
4.3 Θεώρημα 3	10

4.1 Θεώρημα 1

Σε κάθε παίγνιο $(G, b, \Lambda_i, \Lambda_j)$, όταν $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$, $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$, και G είναι σχεδόν-κανονικό γράφος τότε κάθε ακολουθία συμφερούσων ανταλλαγών καταλήγει σε κατάσταση ισορροπίας μετά από το πολύ $|E|$ ανταλλαγές.

Απόδειξη: Ορίζουμε $\Phi(\sigma) = |\{\{i, j\} \in E : c(\sigma^{-1}(i)) = c(\sigma^{-1}(j))\}|$. Δηλαδή το πλήθος των ακμών που καταλήγουν σε κόμβους με παίκτες του ίδιου χρώματος σε μια στρατηγική σ . Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι το $\Phi(\sigma)$ μειώνετε κατά τουλάχιστον 1 μετά από κάθε συμφέρουσα ανταλλαγή. Αφού το $\Phi(\sigma)$ δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη του 0 τότε ο αριθμός των συμφερούσων ανταλλαγών πρέπει να είναι πεπερασμένος και αφού η μέγιστη τιμή του $\Phi(\sigma)$ είναι $|E|$ τότε ο μέγιστο αριθμός συμφέρων ανταλλαγών πριν να φτάσουμε σε κατάσταση ισορροπίας είναι $|E|$. $\Phi(\sigma) = c + x_i - 1 + x_j - 1$, και $\Phi(\sigma_{ij}) = c + y_i - x_i - 1_{ij}(\sigma) + y_j - x_j - 1_{ij}(\sigma)$, όπου c οι ακμές που δεν καταλήγουν στο i ή j και δεν επηρεάζονται από την ανταλλαγή. Επιπλέον αφού ο G είναι σχεδόν-κανονικός ορίζουμε $y_i = y$ και $y_j = y + t$, $t \in \{0, 1\}$. Άρα έχουμε

$$\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_{ij}) = 2(x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1) - t$$

Με βάση τα Λήμματα 1 και 4 για να υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή πρέπει να ισχύει $f_i(\sigma) > \Lambda_i$ και $f_j(\sigma) > \Lambda_j$ και αφού η ανταλλαγή συμφέρει ισχύει $f_j(\sigma_{ij}) < f_j(\sigma)$ άρα έχουμε

$$f_j(\sigma) > f_j(\sigma_{ij}) \Rightarrow x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1 > t \left(1 + \frac{1 - 1_{ij}(\sigma)}{y} - \frac{x_i}{y} \right) \geq 0$$

Αφού το $x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1$ είναι ακέραιος αριθμός τότε

$$x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1 > 0 \Rightarrow x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1 \geq 1$$

Με βάση το οποίο καταλήγουμε ότι

$$2(x_i + x_j + 1_{ij}(\sigma) - y - 1) - t = \Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_{ij}) \geq 1$$

άρα το $\Phi(\sigma)$ μειώνεται κατά τουλάχιστον 1 μετά από κάθε συμφέρουσα ανταλλαγή.

4.2 Θεώρημα 2

Για κάθε $\Lambda_i > \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j > \frac{1}{2}$ υπάρχει παίγνιο σε 2-κανονικό γράφο όπου δεν υπάρχει κατάσταση ισορροπίας.

Απόδειξη: Αφού βρισκόμαστε σε 2-κανονικό γράφο ή αλλιώς δακτύλιο, το $y_i = y_j = 3$. Επιπλέον αφού $\Lambda_i > \frac{1}{2}$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $p_i(2/3) > p_i(1/3) > p_i(1)$ και το ίδιο για Λ_j . Έστω παίγνιο με 6 παίκτες, 3 μπλε και 3 κόκκινους. Τότε πάντα θα βρισκόμαστε σε μια από 3 καταστάσεις:

Κατάσταση 1: Όλοι οι παίκτες της κάθε ομάδας βρίσκονται σε διαδοχικές θέσεις με αποτέλεσμα κάθε ομάδα να έχει ένα παίκτη ο οποίος έχει γείτονες μόνο του ίδιου χρώματος, δηλαδή είναι απομονωμένος. Στους δύο απομονωμένους παίκτες πάντα συμφέρει να ανταλλάξουν θέσει αφού και για τους δύο ισχύει $p(2/3) > p(1)$. Μετά από μια τέτοια ανταλλαγή καταλήγουμε στην κατάσταση 2.

Κατάσταση 2: Κάθε παίκτης έχει 2 γείτονες που βρίσκονται σε διαφορετική ομάδα. Σε αυτήν την περίπτωση συμφέρει σε οποιουδήποτε γειτονικούς παίκτες να ανταλλάξουν θέση αφού $p(2/3) > p(1/3)$. Μετά από μια τέτοια ανταλλαγή καταλήγουμε στην κατάσταση 3.

Κατάσταση 3: Σε αυτήν την κατάσταση υπάρχουν μόνο δύο γειτονικοί παίκτες οι οποίοι έχουν 2 γείτονες διαφορετικού χρώματος ο καθένας. Σε αυτούς του παίκτες πάντα συμφέρει να ανταλλάξουν θέση αφού $p(2/3) > p(1/3)$. Αυτή η ανταλλαγή μας βάζει πίσω στην κατάσταση 1.

Στο πιο πάνω παίγνιο πάντα υπάρχει τουλάχιστον μια συμφέρουσα ανταλλαγή, άρα δεν θα καταλήξει ποτέ σε κατάσταση ισορροπίας.

4.3 Θεώρημα 3

Για κάθε παίγνιο $(G, b, \Lambda_i, \Lambda_j)$ όπου $\frac{1}{\delta(G)+1} \leq \Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$, κάθε στρατηγική σ όπου όλοι οι παίκτες της μιας ομάδας βρίσκονται σε ανεξάρτητο σύνολο του G , είναι κατάσταση ισορροπίας.

Απόδειξη: Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει μια στρατηγική σ με τις πιο πάνω προδιαγραφές όπου υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ μπλε παίκτη i και κόκκινου παίκτη j . Αν οι δύο παίκτες δεν είναι γείτονες και λόγω του ότι ο i έχει μόνο κόκκινους γείτονες αφού όλοι οι μπλε παίκτες βρίσκονται σε ανεξάρτητο σύνολο, έχουμε ότι μετά την ανταλλαγή ο j θα έχει μόνο κόκκινους γείτονες άρα $f_j(\sigma_{ij}) = 1$, $U_j(\sigma_{ij}) = 0$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι συμφέρει η ανταλλαγή. Στην περίπτωση που οι δύο παίκτες είναι γείτονες έχουμε ότι

$$f_i(\sigma) = \frac{1}{\delta(\sigma(i))} \leq \frac{1}{\delta(G)} \leq \Lambda_i$$

Αν ο i βρίσκεται στην κορυφή τότε το όφελος δεν μπορεί να αυξηθεί περισσότερο. Αν ο i βρίσκεται κάτω από την κορυφή τότε από τα Λήμματα 1 και 2 δεν υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ του i και j . Σε κάθε περίπτωση δημιουργείται αντίφαση με την υπόθεση ότι υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή, άρα το σ βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Κεφάλαιο 5

Κόστος Αναρχίας

5.1 Θεώρημα 4	12
5.2 Θεώρημα 5	12
5.3 Θεώρημα 6	14

5.1 Θεώρημα 4

Για παίγνιο $(G, b, \Lambda_i, \Lambda_j)$ σε δ -τυπικό γράφο G με $\Lambda_i < 1/\delta$ τότε

$$PoA(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) \leq \min \left\{ \frac{\delta + 1}{2}, \frac{n}{2b} \right\}.$$

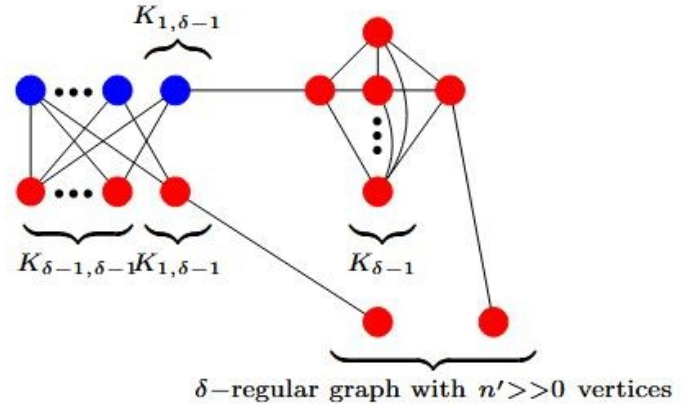
Απόδειξη: Έστω στρατηγική σ σε κατάσταση ισορροπίας. Από Ιδιότητα 2 αφού είμαστε σε κατάσταση ισορροπίας μόνο παίκτες χρώματος $c(j)$ μπορούν να είναι απομονωμένοι. Έστω V_i το σύνολο των κόμβων με χρώμα $c(i)$. Αφού βρισκόμαστε σε δ -κανονικό γράφο $y_i = y_j = \delta$ και επειδή $\Lambda_i < 1/\delta$ τότε η ωφέλεια των παικτών στους κόμβους V_i μεγιστοποιείται όταν $f_i(\sigma) = 1/\delta$, αφού το $f_i(\sigma)$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο. Δηλαδή οι παίκτες του V_i έχουν μέγιστη ωφέλεια όταν όλοι οι γείτονες τους είναι διαφορετικού χρώματος. Για να το πετύχουν αυτό πρέπει να ανταλλάξουν θέση με κάποιο απομονωμένο παίκτη χρώματος $c(j)$. Αφού βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας, σημαίνει ότι όλοι οι V_i παίκτες έχουν μέγιστο όφελος, γιατί αλλιώς θα υπήρχαν συμφέρον ανταλλαγές. Άρα κάθε παίκτης στο V_i έχει δ γείτονες χρώματος $c(j)$, άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{\delta|V_i|}{\delta} = |V_i| \geq b$ ενσωματωμένοι παίκτες χρώματος $c(j)$. Επιπλέον όλοι οι παίκτες του V_i είναι ενσωματωμένοι άρα συνολικά έχουμε $DoI(\sigma) \geq 2b$. Από Ιδιότητα 3 έχουμε ότι $DoI(\sigma^*) = \min\{(\delta+1)b, n\}$, άρα

$$PoA(G, b, \Lambda_i, \Lambda_j) \leq \min \left\{ \frac{(\delta + 1)b}{2b}, \frac{n}{2b} \right\} = \min \left\{ \frac{\delta + 1}{2}, \frac{n}{2b} \right\}.$$

5.3 Θεώρημα 5

Υπάρχει παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ σε δ -κανονικό γράφο όπου $PoA(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) \geq \frac{\delta(\delta + 1)}{2\delta + 1}$ όταν $\Lambda_b \leq 1/3$ ή $(\Lambda_b \leq 1/2$ και $\Lambda_r \leq 2/3)$.

Απόδειξη: Έστω γράφος G όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1. Ο γράφος αποτελείται από 3 υπογράφους G_1 , G_2 και G_3 . Ο G_1 είναι ένας πλήρης διμερής γράφος, που αποτελείται από δύο σύνολα δ κόμβων. Όμως λείπει μια ακμή μεταξύ των δύο ακρινών κόμβων και αυτοί οι κόμβοι έχουν μια ακμή που ενώνει τον ένα με τον G_2 και τον άλλο με τον G_3 . Ο G_2 αποτελείται από ένα πλήρες υπογράφο με $\delta-1$ κόμβους και ακόμα 2 ακρινούς



Σχήμα 5.1: Κατασκευή για κατάσταση ισορροπίας. Σχήμα και κατασκευή των D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor (2022)

κόμβους. Οι δύο ακρινοί κόμβοι έχουν ακμές προς τους κόμβους του πλήρες υπογράφου και ακόμα μια ακμή που ενώνει τον ένα ακρινό κόμβο με το G_1 και τον άλλο με το G_3 . Το G_3 είναι ένας τυχαίος δ -κανονικός γράφος στον οποίο λείπει μια ακμή έτσι ώστε οι δύο κόμβοι να μπορούν να έχουν ακμές προς τους G_1 και G_2 , και ο G_3 να συνεχίζει να είναι δ -κανονικός. Αφού όλοι οι υπογράφοι του G είναι δ -κανονικοί τότε και ολόκληρος ο γράφος G είναι δ -κανονικός. Έστω στρατηγική σ στον πιο πάνω γράφο όπου οι μπλε παίκτες είναι τοποθετημένοι σε ένα από τα δύο σύνολα του G_1 , έτσι ώστε όλοι οι μπλε παίκτες να έχουν μόνο κόκκινους γείτονες. Δεν υπάρχει συμφέρον ανταλλαγή μεταξύ μη γειτονικών παικτών αφού μετά την ανταλλαγή ο κόκκινος παίκτης j θα είναι απομονωμένος άρα, $U_j(\sigma_{ij}) = 0$. Για ανταλλαγές μεταξύ γειτόνων έχουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Ο μπλε παίκτης i βρίσκεται σε ακρινό κόμβο του G_1 και ανταλλάζει θέση με ακρινό κόμβο του G_2 ή G_3 . Σε αυτήν την περίπτωση αφού ο μπλε κόμβος θα έχει μόνο κόκκινους γείτονες και πριν και μετά την ανταλλαγή έχουμε ότι $f_i(\sigma) = f_i(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\delta+1}$.

Άρα η ανταλλαγή δεν συμφέρει ποτέ.

Περίπτωση 2: Μεταξύ δύο γειτονικών κόμβων στο G_1 που δεν έχουν ακμές προς του άλλους υπογράφους. Τότε έχουμε ότι $f_b(\sigma_{ij}) = \frac{\delta}{\delta+1}$. Για $\Lambda_b \leq f_b(\sigma) < f_b(\sigma_{ij})$ η ανταλλαγή δεν συμφέρει αφού το $f_b(\sigma)$ απομακρύνεται από την κορυφή. Για $f_b(\sigma) < \Lambda_b < f_b(\sigma_{ij})$, έχουμε ότι $U_b(\sigma_{ij}) = p_b \left(\frac{\Lambda_b}{1-\Lambda_b} (1 - f_b(\sigma_{ij})) \right) = p_b \left(\frac{\Lambda_b}{1-\Lambda_b} \left(\frac{1}{\delta+1} \right) \right)$ και αφού $\frac{\Lambda_b}{1-\Lambda_b} \leq 1$ καταλήγουμε ότι $\frac{\Lambda_b}{1-\Lambda_b} \left(\frac{1}{\delta+1} \right) \leq \frac{1}{\delta+1} = f_b(\sigma) < \Lambda_b$ άρα $U_b(\sigma_{ij}) \leq U_b(\sigma)$, το οποίο σημαίνει ότι η ανταλλαγή δεν συμφέρει.

Περίπτωση 3: Ο μπλε παίκτης αλλάζει θέση με κόκκινο παίκτη σε ακρινό κόμβο του G_1 . Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε πότε η ανταλλαγή δεν συμφέρει στον μπλε και πότε στον κόκκινο για να ανακαλύψουμε όλες τις τιμές για τις οποίες ισχύει το θεώρημα. Για τον μπλε παίκτη όταν $\Lambda_b \leq f_b(\sigma) < f_b(\sigma_{ij}) = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}$ η ανταλλαγή δεν συμφέρει και όταν $f_b(\sigma) < \Lambda_b < f_b(\sigma_{ij})$ η ανταλλαγή συμφέρει μόνο όταν

$$f_b(\sigma) < \frac{\Lambda_b}{1 - \Lambda_b} (1 - f_b(\sigma_{ij})) \Leftrightarrow \frac{1}{\delta + 1} < \frac{\Lambda_b}{1 - \Lambda_b} \left(\frac{2}{\delta + 1} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \Lambda_b.$$

Για τον κόκκινο παίκτη έχουμε ότι $f_r(\sigma) = \frac{2}{\delta + 1}$ και $f_r(\sigma_{ij}) = \frac{\delta}{\delta + 1}$ άρα όταν $\Lambda_r \leq f_r(\sigma) < f_r(\sigma_{ij})$ η ανταλλαγή δεν συμφέρει και όταν $f_r(\sigma) < \Lambda_r < f_r(\sigma_{ij})$ η ανταλλαγή συμφέρει μόνο όταν

$$f_r(\sigma) < \frac{\Lambda_r}{1 - \Lambda_r} (1 - f_r(\sigma_{ij})) \Leftrightarrow \frac{2}{\delta + 1} < \frac{\Lambda_r}{1 - \Lambda_r} \left(\frac{1}{\delta + 1} \right) \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \Lambda_r.$$

Άρα αφού $\Lambda_b \geq 1/3$ ή $\Lambda_r \geq 2/3$, δεν υπάρχουν συμφέρουσες ανταλλαγές στην περίπτωση 3.

Αφού σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν συμφέρουσες ανταλλαγές βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας και μπορούμε να δείξουμε από το σχήμα ότι $\text{DoI} = 2\delta + 1$ όπου 2δ είναι ο κόμβος του G_1 και ο 1 επιπλέον κόμβος είναι ένα ακρινός κόμβος του G_2 ή G_3 που είναι γείτονας με τον μπλε ακρινό κόμβο του G_1 . Από το Ιδιότητα 3 έχουμε ότι $\text{DoI}(\sigma^*) \leq \min\{(\Delta(G)+1)b, n\}$, αλλά για ένα αρκετά μεγάλο υπογράφο G_3 μπορούμε να έχουμε όλους τους δ μπλε κόμβους τοποθετημένους έτσι ώστε να έχουν δ διαφορετικούς κόκκινους γείτονες. Με αυτή την κατασκευή έχουμε δ μπλε και δ^2 ενσωματωμένους παίκτες, άρα $\text{DoI}(\sigma^*) = \delta(\delta+1)$. Με αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το τελικό αποτέλεσμα $\text{PoA}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) \geq \frac{\delta(\delta+1)}{2\delta+1}$.

5.4 Θεώρημα 6

Για κάθε $c > 0$ υπάρχει παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ σε δακτύλιο έτσι ώστε $\text{PoA}(G, b, 1/2, \Lambda_r) > 2 - c$ και για $\Lambda_b < 1/2$ $\text{PoA}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) > 3/2 - c$.

Απόδειξη: Έστω παίγνιο με $b \geq 2$, $n = 3b$ και $\Lambda_b = 1/2$. Κατασκευάζουμε τον δακτύλιο τομοθετώντας σε διαδοχικές θέσεις 2 μπλε παίκτες και μετά 1 κόκκινο παίκτη. Επαναλαμβάνουμε το μοτίβο μέχρι να λείψουν οι μπλε παίκτες και γεμίζουμε τους υπόλοιπους κόμβους με κόκκινους παίκτες. Ως αποτέλεσμα έχουμε ένα δακτύλιο όπου ο μισός ακολουθεί το μπλε-μπλε-κόκκινο μοτίβο και ο άλλος μισός αποτελείται εξολοκλήρου

από κόκκινους παίκτες. Αφού βρισκόμαστε σε δακτύλιο με $\Lambda_b = \frac{1}{2}$ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$p_b\left(\frac{1}{3}\right) = p_b\left(\frac{2}{3}\right) > p_b(1) = 0.$$

Άρα όλοι οι μπλε παίκτες έχουν μέγιστο όφελος αφού $f_b(\sigma) = 2/3$ για όλους τους μπλε παίκτες. Άρα κανένας μπλε παίκτης δεν θέλει να αλλάξει θέση με αποτέλεσμα να βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας. Βλέπουμε από το σχήμα ότι $\text{DoI}(\sigma) = 3b/2 + 1$, αφού έχουμε b μπλε και $b/2$ κόκκινους ενσωματωμένους παίκτες που βρίσκονται στο μοτίβο $+1$ κόκκινο παίκτη που έχει γείτονα τον πρώτο μπλε παίκτη του μοτίβου. Από το Λήμμα 6 έχουμε ότι $\text{DoI}(\sigma^*) = \min\{(\Delta(G)+1)b, n\} = 3b = n$ αφού βρισκόμαστε σε δακτύλιο. Άρα καταλήγουμε ότι

$$PoA(G, b, 1/2, \Lambda_r) \leq \frac{3b}{\frac{3b}{2} + 1} = \frac{6b}{3b + 2} = \frac{6b}{3b} - c = 2 - c$$

Έστω παίγνιο με $b \geq 2$, $n = 3b$ και $\Lambda_b < \frac{1}{2}$. Κατασκευάζουμε τον δακτύλιο τοποθετώντας διαδοχικά ένα μπλε και ένα κόκκινο παίκτη. Συνεχίζουμε το μοτίβο μέχρι να λείψουν οι μπλε παίκτες και γεμίζουμε τους υπόλοιπους κόμβους με κόκκινους παίκτες. Η τελική κατασκευή θα είναι ένας δακτύλιος με τα $2/3$ καλυμμένα με ένα μπλε-κόκκινο μοτίβο και το υπόλοιπο εξολοκλήρου κόκκινο. Αφού έχουμε $\Lambda_b < \frac{1}{2}$ και βρισκόμαστε σε δακτύλιο μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $p_b\left(\frac{1}{3}\right) > p_b\left(\frac{2}{3}\right) > p_b(1) = 0$, άρα αφού όλου οι μπλε παίκτες έχουν $f_b(\sigma) = 1/3$, έχουν μέγιστη ωφέλεια και δεν θέλουν να αλλάξουν θέση, άρα βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας. Υπολογίζουμε ότι $\text{DoI}(\sigma) = 2b + 1$ αφού έχουμε $2b$ ενσωματωμένους παίκτες στο μοτίβο $+1$ κόκκινο παίκτη που είναι γείτονας του πρώτου μπλε παίκτη. Όπως και πριν έχουμε $\text{DoI}(\sigma^*) = 3b = n$, άρα

$$PoA(G, b, \frac{1}{3}, \Lambda_r) \geq \frac{3b}{2b + 1} = \frac{3}{2} - c.$$

Κεφάλαιο 6

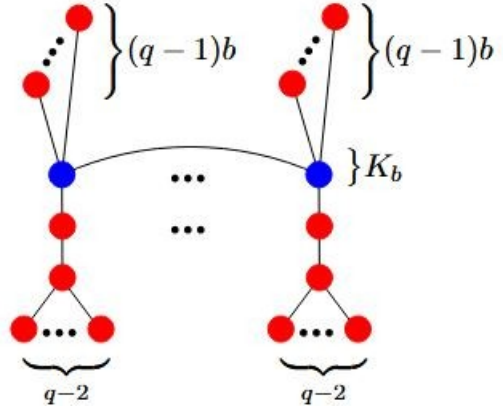
Κόστος Σταθερότητας

6.1 Θεώρημα 7	.
6.2 Θεώρημα 8	.
6.3 Θεώρημα 9	.
6.4 Θεώρημα 10	.

6.1 Θεώρημα 7

Για κάθε $\Lambda_b, \Lambda_r \leq \frac{1}{2}$ υπάρχει παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ τέτοιο ώστε $PoS(G, b) = \Omega(\sqrt{n\Lambda_b})$

Απόδειξη: Έστω ακέραιος $q \geq 2$ με $\frac{1}{q} \leq \Lambda_b < \frac{1}{q-1}$ και γράφος G που αποτελείτε από ένα πλήρης υπογράφο G_1 με b κόμβους, όπου κάθε κόμβος του G_1 είναι συνδεδεμένος με $(q-1)b$ φύλλα και με το φύλλο ενός αστεριού με q κόμβους, όπως σχήμα 7.1. Από το σχήμα υπολογίζουμε ότι $n = (q-1)b^2 + b + bq = \Theta((q-1)b^2)$ όταν το b τείνει προς το άπειρο, το οποίο μας δίνει ότι $b = \Omega\left(\sqrt{\frac{n}{q-1}}\right) = \Omega(\sqrt{n\Lambda_b})$.



Σχήμα 7.1: Κατασκευή της σ^* για το θεώρημα 7. Σχήμα και κατασκευή των D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor (2022)

Έστω στρατηγική σ^* όπου τοποθετούμε όλους τους μπλε παίκτες στο G_1 . Από το σ^* έχουμε $DoI(\sigma^*) = (q-1)b^2 + 2b = \Omega((q-1)b^2)$, αφού κάθε μπλε κόμβος έχει γείτονες $(q-1)b$ κόκκινα φύλλα και 1 κόκκινο φύλλο αστεριού. Επιπλέον η σ^* δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας αφού υπάρχει συμφέρουσα ανταλλαγή μεταξύ μπλε παικτών στο G_1 και των κεντρικών κόμβων σε κάθε αστέρι. Ξέρουμε ότι η ανταλλαγή συμφέρει στον κόκκινο παίκτη αφού θα πάει από απομονωμένη σε μη απομονωμένη θέση και συμφέρει για τον μπλε γιατί

$$f_b(\sigma^*) \leq \frac{b}{qb+1} < f_b(\sigma^*_{ij}) = \frac{1}{q} < \Lambda_b. \text{ Με την ίδια λογική δείχνουμε ότι είναι αδύνατο να}$$

υπάρξει κατάσταση ισορροπίας όταν υπάρχουν περισσότερο από ένας μπλε παίκτες στο G_1 αφού υπάρχει συμφέρον ανταλλαγή με κόκκινο παίκτη σε κέντρο αστεριού. Άρα για κάθε σ που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας ισχύει ότι $\text{DoI}(\sigma) \leq (b-1)(q) + qb + 1 = O(2qb)$. Άρα έχουμε ότι $\text{PoS}(G, b) = \frac{\Omega((q-1)b^2)}{O(2qb)} = \Omega(b) = \Omega(\sqrt{n\Lambda_b})$.

6.2 Θεώρημα 8

Για κάθε παίγνιο $(G, b, \frac{1}{2}, \Lambda_r)$ και $\Lambda_r \leq \frac{1}{2}$ σε διμερή γράφο ισχύει ότι $\text{PoS}(G, b, \frac{1}{2}, \Lambda_r) \leq 1 + n/b$.

Απόδειξη: Έστω V_1 και V_2 τα ανεξάρτητα σύνολα του G με $|V_1| \leq |V_2|$, σ^* όπου B_1 και B_2 τα σύνολα των μπλε κόμβων στο V_1 και V_2 αντίστοιχα, R_1 και R_2 οι κόκκινοι παίκτες που έχουν μπλε γείτονες που ανήκουν στο B_2 και B_1 αντίστοιχα. Άρα έχουμε $\text{DoI}(\sigma^*) = b + |R_1| + |R_2|$.

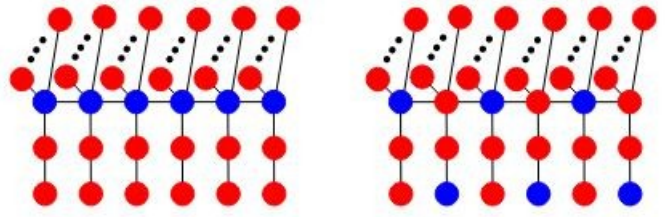
Κατασκευάζουμε το σ ξεκινώντας από το σ^* και ανταλλάζουμε τους παίκτες του B_1 με κόκκινους παίκτες του V_2 . Αφού $b \leq n/2 \leq |V_2|$ όλοι οι μπλε παίκτες μπορούν να μετακινηθούν στο V_2 . Τότε με βάση το Θεώρημα 3 βρισκόμαστε σε κατάσταση ισορροπίας με $\text{DoI}(\sigma) \geq b + |R_1|$. Άρα έχουμε

$$\text{PoS}(G, b, 1/2, \Lambda_r) \leq \frac{b + |R_1| + |R_2|}{b + |R_1|} = 1 + \frac{|R_2|}{b + |R_1|} \leq 1 + \frac{n}{b}.$$

6.3 Θεώρημα 9

Υπάρχει παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ με $\frac{1}{\delta(G)+1} \leq \Lambda_b \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_r \leq \frac{1}{2}$ σε διμερή γράφο όπου ισχύει ότι $\text{PoS}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) \geq 2$.

Απόδειξη: Έστω γράφος G που αποτελείται από μια σειρά από b κόμβους. Κάθε κόμβος στη σειρά είναι συνδεδεμένος με $2(b-1)$ φύλλα και μια “ουρά” που αποτελείται από 2 κόμβους.



Σχήμα 6.2: Κατασκευή σ^* για το θεώρημα 9.

Κατασκευάζουμε σ^* τοποθετώντας όλους το μπλε παίκτες στους κόμβους της σειράς

Σχήμα και κατασκευή των D.Bilo, V.Bilo, P.Lenzner, L.Molitor (2022)

που είναι η βάση του γράφου και έχουμε $\text{DoI}(\sigma^*) = 2(b-1)b + 2b$.

Κατασκευάζουμε σ όπου κάθε δεύτερος μπλε παίκτης μετακινείται στην άκρη της ουράς που είναι συνδεδεμένη στον κόμβο του, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν γειτονικοί μπλε παίκτες. Από το Θεώρημα 3, αφού όλοι οι μπλε παίκτες βρίσκονται σε ανεξάρτητο σύνολο το

σ είναι σε κατάσταση ισορροπίας. Άρα έχουμε ότι $\text{DoI}(\sigma) = b(b-1) + 5b/2$. Καθώς το b τείνει προς το άπειρο έχουμε ότι $\text{PoS}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) \geq 2$.

6.4 Θεώρημα 10

Για κάθε παίγνιο $(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r)$ με $\Lambda_b \leq 1/2$, $\Lambda_r \leq 1/2$, G σχεδόν-τυπικός και $b \geq \alpha(G)$ ισχύει ότι $\text{PoS}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) = 1$.

Απόδειξη: Έστω σ που ελαχιστοποιεί το $\Phi(\sigma)$. Με βάση το Θεώρημα 1 το σ βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Υποθέτω για αντίφαση ότι υπάρχει απομονωμένος μπλε κόμβος στο σ , δηλαδή $\text{DoI}(\sigma) < n$.

Έστω ότι οι κόκκινοι κόμβοι δεν βρίσκονται σε ανεξάρτητο σύνολο, άρα υπάρχει κόκκινος παίκτης j με τουλάχιστον ένα κόκκινο γείτονα. Αν ανταλλάξουμε τον j με τον απομονωμένο μπλε παίκτη i , έχουμε ότι: $\Phi(\sigma) = c + \delta(\sigma(i)) + x_r$ και $\Phi(\sigma_{ij}) = c + \delta(\sigma(j)) - x_r$, όπου x_r οι κόκκινοι γείτονες του j και c όλες οι ακμές που δεν επηρεάζονται από την ανταλλαγή. Άρα $\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_{ij}) = \delta(\sigma(i)) - \delta(\sigma(j)) + 2(x_r) > 0$, το οποίο σημαίνει ότι το $\Phi(\sigma)$ μειώνεται μετά την ανταλλαγή το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι το σ ελαχιστοποιεί το $\Phi(\sigma)$.

Έστω ότι οι κόκκινοι κόμβοι βρίσκονται σε ανεξάρτητο σύνολο. Τότε έχουμε το πλήθος των κόκκινων παικτών $r < \alpha(G)$. Όμως αυτό έρχεται σε αντίφαση με το ότι $r \geq b \geq \alpha(G)$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με ένα απομονωμένο κόκκινο κόμβο καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα άρα συμπεράνουμε ότι $\text{DoI}(\sigma) \geq n$. Άρα $\text{DoI}(\sigma) = \text{DoI}(\sigma^*) = n$ και $\text{PoS}(G, b, \Lambda_b, \Lambda_r) = 1$.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

7.1 Συμπεράσματα

7.1 Συμπεράσματα

Συγκρίνοντας τα δικά μας αποτελέσματα με το προηγούμενο μοντέλο βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήσαμε, τα αποτελέσματα τα του προηγούμενου μοντέλου συνεχίζουν να ισχύουν για τις αντίστοιχες τιμές του νέου μοντέλου. Συγκεκριμένα βλέπουμε στα Λήμματα 1 μέχρι 4 και στα θεωρήματα 1, 2, 7 και 10 φτάνουμε στα ίδια συμπεράσματα με παρόμοιους περιορισμούς. Όπου στο προηγούμενο μοντέλο είχαμε $\Lambda \leq \frac{1}{2}$ ή $\Lambda \geq \frac{1}{2}$ στο νέο μοντέλο έχουμε $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \leq \frac{1}{2}$ ή $\Lambda_i \geq \frac{1}{2}$ και $\Lambda_j \geq \frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Άρα με το νέο μοντέλο δείξαμε ότι τα πιο πάνω αποτελέσματα ισχύουν και σε όλες τις περιπτώσεις όπου $\Lambda_i \neq \Lambda_j$. Για τα θεωρήματα 3 και 5 καταφέραμε στο νέο μοντέλου να ανοίξουμε τους περιορισμούς περισσότερο, αφαιρώντας το κάτω όριο για μια από της κορυφές στο θεώρημα 3 και δίνοντας δύο σύνολα για τα οποία ισχύει το θεώρημα 5, ένα από τα οποία εξαρτάτε μόνο από μια από της κορυφές. Στα θεωρήματα 4 και 6 δείξαμε ότι αρκεί να περιορίζουμε μόνο μια από τις κορυφές για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Στο θεώρημα 8 μειώνοντας τους περιορισμούς καταλήξαμε σε ένα πιο ανοικτό όριο και στο θεώρημα 9 η αντίστοιχη απόδειξη είναι μόνο για ένα συγκεκριμένο Λ , δείξαμε ότι ισχύει για ένα σύνολο.

Όμως, αφού όλες οι αποδείξεις μας, έγιναν σε σύγκριση με μοντέλο μιας κορυφής στις πλείστες περιπτώσεις που μελετούμε οι κορυφές μας έχουν παρόμοια όρια. Περιπτώσεις όπου μόνο μια ομάδα είναι ανεκτική: $\Lambda_i \leq \frac{1}{2}$, $\Lambda_j \geq \frac{1}{2}$ παραμένουν ανεξερευνήτες. Επιπλέον βρίσκουμε μερικές περιπτώσεις που τα αποτελέσματα εξαρτώνται μόνο από το Λ μιας ομάδα το οποίο θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί κατά πόσο συνεχίζει να ισχύει για μεγαλύτερο αριθμό διαφορετικών ομάδων.

Βιβλιογραφία

- [1] D. Bilo, V. Bilo, P. Lenzner and L. Molitor, “Tolerance is Necessary for Stability: Single-Peaked Swap Schelling Games, 2022, [arXiv:2204.12599](https://arxiv.org/abs/2204.12599)
- [2] Th. C. Schelling Micromotives and Macrobehavior WW Norton & Company, 2006
- [3] P. Kanellopoulos, M Kyropoulou and A. A. Voudouris Modified schelling games, 2021 TCS
- [4] D. Bilo, V. Bilo, P. Lenzner, and L. Molitor. Topological influence and locality in swap schelling games, 2020